

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires via l'opérateur de Koopman

MUGISHO ZAGABE, Christian

Award date:
2017

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Université de Namur

Faculté des Sciences

**Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non
linéaires via l'opérateur de Koopman**

Mémoire présenté pour l'obtention du grade académique
de Master 60 en sciences mathématiques

Mugisho Zagabe Christian

Promoteur : **Alexandre Mauroy**

Juin 2017

Nos remerciements les plus sincères s'adressent à notre promoteur, Monsieur Alexandre Mauroy. Ses remarques, ses orientations, ses propositions et sa disponibilité nous ont été plus que capitales.

Que notre profonde gratitude soit adressée à tous ceux qui, d'une façon ou d'une autre, nous ont aidé dans la réalisation de ce travail. Nous pensons plus particulièrement à Monsieur J. Nyenyezi, à notre chère « choute » L. Lamelyn et à Madame M. Courouble.

Enfin, nous adressons notre reconnaissance à nos parents, à nos frères et sœurs, à l'UNAMUR, à l'ISP-Bukavu, à notre mécène, à notre collègue et ami L. Kibungo, à Monsieur M. Mugumaoderha,...

Résumé

Il est des situations où un système dynamique est une combinaison de plusieurs autres sous-systèmes variant au cours du temps. Mises ensemble, les dynamiques de ces sous-systèmes individuels constituent un système commuté. Le passage d'un sous-système à l'autre est régi par une loi qui active seulement ce dernier pendant un temps donné. La stabilité des systèmes dynamiques commutés est une problématique qui dépasse les idées intuitives. La loi de commutation est plus que décisive dans le comportement de l'ensemble des sous-systèmes, que ceux-ci soient tous stables individuellement ou pas. Il existe cependant des systèmes commutés stables quelle que soit la règle de passage d'un sous-système à l'autre. On parle alors de la stabilité uniforme. Nombreux sont les résultats liés à l'étude de cette dernière dans le cas linéaire. Le cas non linéaire est principalement étudié localement par la linéarisation autour de l'équilibre. Dans le cas linéaire, un critère plus général est basé sur la résolubilité de l'algèbre de Lie engendrée par les matrices correspondant aux différents sous-systèmes. Ce critère (et/ou d'autres liés à la structure de l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs) n'est pas facilement étendu au cas non linéaire et D. Liberzon en propose un problème ouvert. Ce dernier résout partiellement la question en considérant des critères de « nilpotence » qui sont plus restrictifs.

Dans ce travail, nous appliquons l'opérateur de Koopman à un système commuté non linéaire qui le transforme en un système commuté linéaire dans l'espace des fonctions observables. Nous développons en particulier une méthode numérique basée sur la réalisation de l'opérateur de Koopman dans la base de monômes. Les matrices de Koopman ainsi obtenues peuvent alors être traitées via le grand arsenal de méthodes qui existent pour l'étude de la stabilité uniforme dans le cas linéaire. Par ailleurs, nous développons un algorithme qui teste la résolubilité de l'algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman, permettant ainsi de déterminer la stabilité uniforme du système commuté de manière systématique. Nous terminons par le développement d'une méthode permettant d'estimer le bassin d'attraction d'un système commuté à partir d'une fonction de Lyapunov commune.

Abstract

There exist situations where a dynamic system combines several subsystems varying over time. Taken together, dynamics of individual subsystems constitute a switched system. The switching from one subsystem to the other is governed by a commutation law which activates only one system at a given time. Stability of switched systems goes beyond intuitive ideas. Switching is more than decisive in the behavior of the set of subsystems, whether these are all individually stable or not. However, there exist switched systems that are stable under arbitrary switching. This property is called uniform stability. Most results on uniform stability hold for linear systems. The nonlinear case is mainly studied locally by linearization around the equilibrium. In the first case, a more general criterion is based on the solvability of the Lie algebra generated by the matrices corresponding to the different subsystems. Criteria related to the structure of the Lie algebra generated by the vector fields may not be easily extended to the second case and D. Liberzon suggests an open problem in this framework. He partially solves that problem by considering more restrictive « nilpotence » criteria.

In this work, we apply the Koopman operator to a nonlinear switched system which transforms it into a linear switched system in the space of observable functions. Particularly, we develop a numerical method based on the realization of the Koopman operator in the basis of monomials. Koopman matrices obtained in this case can be studied through existing methods for uniform stability in the linear case. Moreover, we develop an algorithm that verifies solvability of the Lie algebra generated by the Koopman matrices, thus allowing to determine systematically the uniform stability of the system switched. Finally, a method is also developed, which builds a common Lyapunov function and estimates the basin of attraction of the switched system.

Table des matières

1. Introduction	7
2. Généralités sur la stabilité et les systèmes commutés	10
2.1. Stabilité au sens de Lyapunov	10
2.2. Introduction aux systèmes commutés	14
2.3. Problématique de la stabilité des systèmes commutés	15
2.4. Stabilité uniforme des systèmes commutés	18
2.4.1. Fonction de Lyapunov commune	18
2.4.2. Commutation entre champs de vitesse	19
2.4.3. Algèbre de Lie engendrée par les champs de vitesse	20
2.4.4. Crochet entre les champs de vitesse	21
3. Opérateur de Koopman associé à un système dynamique	23
3.1. Opérateur de Koopman	23
3.1.1. Dans le cas discret	23
3.1.2. Dans le cas continu	25
3.1.3. Éléments propres de l'opérateur de Koopman	26
3.2. Matrice de Koopman	27
3.2.1. Système en 1D	27
3.2.2. Système en 2D	29
3.2.3. Projection de la matrice de Koopman	31
4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires	33
4.1. Algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman	33
4.2. Nuances avec le résultat de D. Liberzon	40
4.3. Construction d'une fonction candidate de Lyapunov commune	42
4.4. Illustrations et discussions	43
4.4.1. Illustration 1	44
4.4.2. Illustration 2	45
4.4.3. Illustration 3	46
4.4.4. Illustration 4	48
4.4.5. Illustration 5	49
4.4.6. Illustration 6	50
5. Conclusion	55

Table des matières

A. Codes Matlab	57
A.1. Code principal	57
A.1.1. Calcul de la matrice de Koopman tronquée	59
A.1.2. Calcul de la matrice de Koopman projetée	60
A.1.3. Test de résolubilité	62
A.1.4. Calcul de la fonction de Lyapunov commune	65

Dans [3] (page 20) il est présenté le scénario suivant¹ : « deux familles de lapins (les Argentés de Champagne et les Nains de couleur) et une famille de loups cohabitent dans un même environnement. Les loups privilégient généralement la chasse aux Argentés de Champagne mais ne se privent pas de quelques Nains de couleurs quand l'occasion se présente et si la nourriture se raréfie. L'évolution démographique de ces familles dépend de comportements adoptés par chacune des espèces. En effet, plusieurs évolutions sont possibles.

- Premier mode : les trois espèces cohabitent.
- Deuxième mode : les Argentés de Champagne vivent réfugiés, et les loups ne changent en rien leurs habitudes alimentaires.
- Troisième mode : les loups manquent de nourriture et décident pour survivre de s'attaquer plus sérieusement aux Nains de couleur.
- Quatrième mode : les Argentés de Champagne retournent vers le lieu commun, mais les loups ne se rendent pas compte de leur retour.
- Cinquième mode : les loups repèrent la présence des Argentés de Champagne et reviennent à leur instinct primaire, on retrouve alors le premier mode.

Les modes ci-dessus définissent une famille de systèmes dynamiques. L'état, ici la démographie des trois espèces, va varier au cours du temps. Parmi tous ces modes, un seul est actif à un instant donné. Suite à un changement de mode l'état évolue alors suivant une nouvelle dynamique. Cette illustration donne naissance à la notion de système commuté ».

D'après [22] (page 5), « les systèmes commutés constituent un cas particulier des systèmes hybrides ». Un système hybride consiste en un mélange de sous-systèmes régis par différentes dynamiques. Ces dynamiques peuvent être continues, discrètes,... Dans un système commuté, les sous-systèmes sont interchangés (commutés) suivant une loi indiquant le seul sous-système actif pendant un temps donné. Selon [3] (page 29), cette loi peut être liée à la nature physique du système (telles que les réactions entre différents composants au cours d'un procédé chimique,...), ou à un opérateur qui, soit provoquerait cette commutation (automobiliste et boîte de vitesse,...), soit générerait une commande commutant.

Comme pour n'importe quel autre type de système dynamique, on s'intéresse au comportement des solutions et trajectoires des systèmes commutés. L'étude de la stabilité s'inscrit dans ce sens. Celle des systèmes commutés repose sur trois grands problèmes importants présentés dans [14] :

1. Ce scénario est une illustration « pédagogique » concernant le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra.

1. Introduction

1. « Trouver des conditions garantissant la stabilité d'un système commuté pour n'importe quelle loi de commutation. On parle alors de la stabilité uniforme. C'est d'ailleurs ce problème qui nous intéressera dans ce mémoire.
2. Identifier la (les) loi(s) de commutation pour laquelle (lesquelles) le système commuté est stable.
3. Construire une (des) loi(s) de commutation qui stabilise(nt) le système commuté ».

La pertinence de ces problèmes, présentée dans [13] (page 13), est liée aux faits que d'une part, une « mauvaise » loi de commutation peut déstabiliser un système commuté quand bien même les sous-systèmes sont individuellement stables et d'autre part, une « bonne » loi de commutation peut quant à elle stabiliser un système commuté composé de sous-systèmes individuellement instables.

Au fil du temps, plusieurs résultats sur la stabilité uniforme des systèmes commutés ont été établis. L'approche la plus fréquente développée est celle de l'existence d'une fonction de Lyapunov commune (aux sous-systèmes) dont le grand intérêt est, d'après un résultat dans [18], sa nécessité et sa suffisance à la stabilité uniforme. Dans le cas linéaire, le résultat établi dans [12], repose sur la résolubilité de l'algèbre de Lie engendrée par les matrices correspondant aux sous-systèmes. On y démontre l'existence d'une fonction quadratique de Lyapunov commune (aux sous-systèmes) via la triangulation simultanée de ces dernières matrices. Dans le cas non linéaire, on procède par la méthode indirecte de Lyapunov (linéarisation des sous-systèmes autour du point d'équilibre) pour se ramener au cas linéaire mais on se limite ainsi à la stabilité locale. D'après [13] (page 24), l'existence d'une fonction quadratique de Lyapunov commune n'est qu'une condition nécessaire à la stabilité uniforme. Aussi, pour le cas linéaire, l'auteur propose des inégalités matricielles linéaires (*LMI*) à résoudre pour obtenir une fonction quadratique de Lyapunov commune.

Dans [17], il est établi un résultat de stabilité uniforme d'un système commuté basé sur la condition de commutation des champs de vecteurs des sous-systèmes. Ce dernier résultat reste intéressant puisqu'il est valable tant pour le cas linéaire que non linéaire par rapport à la stabilité globale². Dans un souci d'étudier la stabilité globale des systèmes non linéaires commutés à partir de seuls champs de vitesse³, sans utiliser la méthode indirecte de Lyapunov, Liberzon propose dans [16] un problème ouvert. Celui-ci consiste à étendre les résultats de [12] en identifiant les propriétés à imposer à l'algèbre de Lie générée par les champs de vitesse afin de garantir la stabilité globale du système non linéaire commuté. Contrairement au cas linéaire, il est expliqué dans [2] que la forme triangulaire des champs de vitesse s'avère insuffisante pour résoudre le problème de Liberzon. Une avancée partielle est proposée dans [19], où sont exploités les crochets de Lie entre les différents champs de vitesse. Aussi, les auteurs démontrent un résultat de stabilité du système commuté à partir de seuls champs de vitesse de deux sous-systèmes. Une condition nécessaire pour ce résultat est la nilpotence de l'algèbre de Lie engendrée par ces deux champs de vitesse. Dans ce travail, nous tentons d'apporter une réponse supplémentaire au problème de D. Liberzon et proposons une méthode systématique qui permet d'étudier la stabilité uniforme des systèmes même pour ceux dont le résultat de [19] n'est pas applicable.

La méthode développée dans ce travail repose sur l'opérateur de Koopman (opérateur de composition) agissant sur l'espace des observables. Cet opérateur est de dimension infinie mais linéaire. Dans [20], les auteurs proposent une nouvelle approche, vue comme extension de la linéarisation, pour étudier la stabilité globale des systèmes non linéaires. En particulier, ils montrent que les propriétés spectrales de l'opérateur de Koopman sont des objets clés pour l'étude de la stabilité globale. La méthode numérique

2. D'autres résultats de stabilité globale dans le cas linéaire sont des résultats de stabilité locale pour le cas non linéaire.

3. Il s'agit ici des champs de vitesse qui ne commutent pas.

1. Introduction

développée pour la recherche des fonctions propres de l'opérateur de Koopman consiste en une décomposition de celles-ci sur une base polynomiale (par exemple, la base des monômes ou des polynômes de Bernstein). Enfin, les fonctions propres obtenues permettent de construire une fonction candidate de Lyapunov et donc d'estimer, numériquement, le bassin d'attraction du système dynamique.

L'objectif de ce mémoire est de développer une méthode systématique d'étude de la stabilité des systèmes commutés non linéaires via l'opérateur de Koopman projeté sur la base de fonctions polynomiales. Afin de simplifier légèrement le problème, chaque fois qu'il sera nécessaire, nous nous situerons dans le cas restreint où les sous-systèmes sont de dimension deux. Par ailleurs, les champs de vitesse sont tous polynomiaux et le point d'équilibre est hyperbolique. Les systèmes commutés étudiés seront autonomes et à temps continu. Spécifiquement les objectifs principaux de ce travail sont

- d'ouvrir une voie théorique qui complète les résultats de [19], laquelle voie est basée sur l'opérateur de Koopman appliqué au système commuté ;
- de proposer une méthode numérique qui permette d'obtenir une fonction de Lyapunov commune (non quadratique) de manière systématique. Cette méthode passe par l'implémentation d'algorithmes pour
 1. calculer la matrice de réalisation de l'opérateur de Koopman sur la base de monômes ;
 2. tester la résolubilité de l'algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman ;
 3. estimer le bassin d'attraction d'un système commuté composé de deux sous-systèmes.

Le premier chapitre de ce mémoire constitue un survol des systèmes commutés pour y situer le cas particulier qui nous intéresse. Nous y présentons les définitions de base, la problématique de la stabilité des systèmes commutés et les résultats relatifs, en mettant en évidence ceux qui nous seront utiles pour le développement de notre méthode.

Le deuxième chapitre se concentre sur l'opérateur de Koopman associé à un système dynamique donné. Nous y présentons l'importance de la nouvelle approche, basée sur la théorie des opérateurs, pour étudier un système dynamique. Nous y abordons aussi la méthode de la projection du générateur infinitésimal du semi-groupe des opérateurs de Koopman.

Le troisième chapitre contient notre contribution principale et met en lien les deux premiers afin d'étudier la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires au moyen de la projection de l'opérateur de Koopman sur la base de monômes. Précisément, étant donné un système commuté, nous représentons, pour chacun de ces sous-systèmes, l'opérateur de Koopman, dans la base de monômes, par une matrice de taille infinie. En pratique, une fois la base fixée, les matrices calculées seront rectangulaires. Nous choisissons alors deux voies pour nous ramener à des matrices carrées ; la première consiste à les tronquer et la seconde à projeter leurs colonnes en utilisant la projection de Galerkin. Les matrices carrées ainsi obtenues sont soumises au test de résolubilité via l'algèbre de Lie qu'elles engendrent. Nous nous servons ensuite du résultat de Liberzon pour conclure sur l'existence d'une fonction de Lyapunov commune, qui dans notre cas est plus générale qu'une fonction quadratique. De plus, par la méthode de résolution des *LMIs*, les matrices de Koopman permettent de construire une fonction de Lyapunov commune et d'estimer, comme dans [20], le bassin d'attraction du système commuté. Cette méthode permet d'aller plus loin dans l'étude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires que ce qui est envisagé dans [19]. Nous évoquons pour ce faire les nuances entre notre approche et celle de D. Liberzon. Enfin, ce chapitre se termine par quelques illustrations qui sont étudiées de manière systématique par la méthode numérique développée.

Généralités sur la stabilité et les systèmes commutés

Sommaire

2.1. Stabilité au sens de Lyapunov	10
2.2. Introduction aux systèmes commutés	14
2.3. Problématique de la stabilité des systèmes commutés	15
2.4. Stabilité uniforme des systèmes commutés	18
2.4.1. Fonction de Lyapunov commune	18
2.4.2. Commutation entre champs de vitesse	19
2.4.3. Algèbre de Lie engendrée par les champs de vitesse	20
2.4.4. Crochet entre les champs de vitesse	21

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux différentes notions générales concernant notre cas d'étude à savoir les systèmes commutés. Afin de dégager succinctement ces notions, nous n'entrerons pas en profondeur de différentes questions qu'elles soulèvent. Notre but est de définir et situer, dans l'immense monde des systèmes dynamiques, ce que sont les systèmes commutés mais surtout d'en présenter l'étude de la stabilité telle qu'effectuée par différents auteurs au cours des années. Les résultats cités seront, pour la plupart, ceux qui définissent le canevas dans lequel nous situerons notre travail. Après avoir rappelé brièvement la notion générale de la stabilité d'un système dynamique, nous allons nous focaliser sur les systèmes commutés et aller tout droit à la notion de la stabilité uniforme qui nous intéresse.

2.1. Stabilité au sens de Lyapunov

De façon générale, la stabilité est une question majeure pour l'étude des systèmes dynamiques. Dans ce qui suit, les systèmes dynamiques évoqués sont supposés invariants dans le temps :

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \chi \subset \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

où $F : \chi \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction localement Lipschitz. Nous supposons également que l'origine¹ est un *point d'équilibre* du système, c'est-à-dire $F(0) = 0$, et limitons notre attention aux propriétés de stabilité de cet équilibre. Étant donné que le système est invariant dans le temps, nous posons, sans perte de généralité, le temps initial $t_0 = 0$.

D'après [25], « un point d'équilibre correspond au point de l'espace d'état pour lequel l'évolution du système s'arrête. Une fois le système placé à un tel point, il y demeure indéfiniment sans évoluer vers un

1. Si l'équilibre est autre que l'origine, il est possible de s'y ramener par un changement de variable adapté.

2. Généralités sur la stabilité et les systèmes commutés

autre état (étant donné que $\dot{x} = 0$). La notion de stabilité est liée au comportement du système lorsque celui-ci est écarté de son point d'équilibre. Intuitivement, la *stabilité (simple)* signifie que si le système est « légèrement » perturbé de son point d'équilibre, il reste « proche » de celui-ci ». D'après [3] (page 37), « l'attractivité, quant à elle, traduit le fait que, s'écartant légèrement de l'équilibre, le système y reviendra au bout d'un certain temps. La *stabilité asymptotique* combine à la fois la stabilité et l'attractivité. Elle indique que le système reste proche du point d'équilibre et converge vers celui-ci au cours du temps. La *stabilité exponentielle* vient ajouter au caractère asymptotique un critère de rapidité de convergence ». Ces notions sont formellement définies comme ci-dessous :

Définitions : Soit le système invariant dans le temps $\dot{x} = F(x)$, $x \in \chi \subset \mathbb{R}^n$. L'origine est un point d'équilibre

(i) *stable* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x(0)\| \leq \delta \implies \|x(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t > 0. \quad (2.2)$$

Si la condition 2.2 est valable $\forall \delta > 0$ alors le système est dit *globalement stable*.

(ii) *asymptotiquement stable* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x(0)\| \leq \delta \implies \|x(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t > 0 \quad (2.3)$$

et

$$\|x(0)\| \leq \delta \implies x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (2.4)$$

- L'ensemble de tous les états initiaux à partir desquels les trajectoires convergent vers l'origine est appelé *région (bassin) d'attraction*.
- Si les conditions 2.3 et 2.4 sont valables $\forall \delta > 0$, ou pour toute condition initiale $x(0)$, c'est-à-dire si le bassin d'attraction est l'espace d'état $\chi \subseteq \mathbb{R}^n$ tout entier, alors le système est dit *globalement asymptotiquement stable*.
- Si le système n'est pas nécessairement stable mais a la propriété que toutes les solutions aux conditions initiales dans un voisinage de l'origine convergent vers l'origine, alors il est dit (localement) *attractif*. Nous disons que le système est *globalement attractif* si pour toutes les conditions initiales ses solutions convergent vers l'origine.

(iii) *exponentiellement stable* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta, \beta, \lambda > 0 \text{ tel que } \|x(0)\| \leq \delta \implies \|x(t)\| \leq \beta \|x(0)\| e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0. \quad (2.5)$$

Si la condition 2.5 est valable $\forall \delta > 0$ alors le système est dit *globalement exponentiellement stable*.

Dans [25](page 72), l'auteur explique la définition 2.2 en ces termes : « lorsque le système est stable, il est toujours possible, par le choix des conditions initiales (la boule de rayon δ), de contraindre la solution à l'intérieur d'une région choisie à l'avance et de manière arbitraire (la boule de rayon ϵ) ».

En pratique ces définitions ne sont pas faciles à manipuler. En effet, elles demandent la connaissance préalable de la solution du système dynamique à étudier. D'où la nécessité de chercher un moyen d'étudier la stabilité d'un système dynamique sans devoir intégrer les équations le décrivant. C'est le grand intérêt du théorème 2.1.1 de Lyapunov dans les lignes qui suivent.

Considérons une fonction \mathcal{C}^1 (continûment différentiable) $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Elle est dite définie positive si $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Si $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$, alors V est dit *radialement*

2. Généralités sur la stabilité et les systèmes commutés

non bornée. Si V est à la fois définie positive et radialement non bornée, alors il existe deux fonctions α_1 et α_2 de classe \mathcal{K}_∞ de telle sorte que V satisfait

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad \forall x.$$

Dans ce qui précède, une fonction $\alpha : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ est dite de classe \mathcal{K} si elle est continue, strictement croissante, et $\alpha(0) = 0$. Si, de plus, α est non bornée, alors elle est dite de classe \mathcal{K}_∞ . Une fonction V est radialement non bornée si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty.$$

Théorème 2.1.1. (*Lyapunov : [13] (page 15)*) Supposons qu'il existe une fonction C^1 , $V : \chi \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie positive telle que

$$\dot{V}(x) \leq 0; \quad x \in \chi \quad \left(\text{resp. } \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \right).$$

Alors le système est stable (resp. asymptotiquement stable).

Si dans le dernier cas V est également radialement non bornée² alors le système est globalement asymptotiquement stable.

Précisons que dans le théorème 2.1.1 ci-dessus,

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \cdot F(x) = L_F V(x)$$

est la dérivée de Lie le long des solutions du système. L'équivalent local du théorème 2.1.1 précédent revient à considérer la stabilité, non pas dans tout l'espace d'état, mais dans une région autour de l'équilibre.

Théorème 2.1.2. (*[25] (page 80)*) S'il existe une boule \mathcal{B}_{R_0} (centrée en 0 et de rayon R_0) telle que

- $V(x) > 0$ ($\forall x \neq 0$ dans \mathcal{B}_{R_0}) et $V(0) = 0$;
- $\dot{V}(x) \leq 0$ dans \mathcal{B}_{R_0} ,

alors le point d'équilibre est stable.

Si, en plus, $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$ dans \mathcal{B}_{R_0} , alors la stabilité est asymptotique.

La fonction V s'appelle, dans la littérature mathématique, **fonction candidate de Lyapunov**. La question qui se pose à ce niveau est : *comment trouver (construire) V ?* La réponse à cette question n'est pas générale. En effet, pour tel ou tel autre type de système dynamique on peut construire une fonction de Lyapunov de façon particulière. C'est d'ailleurs ce que nous essayerons, plus tard, de faire dans ce travail pour un cas particulier de systèmes dynamiques. Nous pouvons énoncer un théorème important qui permet de trouver une fonction V pour un système dynamique linéaire :

Théorème 2.1.3. (*[25], (page 88)*) Soit $\dot{x} = Ax$ un système linéaire invariant dans le temps, tel que A est de Hurwitz. Alors pour toute matrice $Q > 0$ (Q définie positive) il existe une matrice $P > 0$ telle que

$$A^T P + P A = -Q.$$

Ainsi la fonction de Lyapunov est définie par :

$$V(x) = x^T P x \quad \text{et} \quad \dot{V}(x) = -x^T Q x.$$

2. Cette condition est d'une importance capitale pour la stabilité globale car elle garantit le fait que les courbes de niveau de V , $V = cste$, sont fermées.

2. Généralités sur la stabilité et les systèmes commutés

La fonction V ici définie est appelée **fonction quadratique de Lyapunov**. Elle présente un intérêt de taille dans ce travail. La propriété « A est de Hurwitz » signifie tout simplement que la matrice A est stable autrement dit, toutes ses valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives :

$$\mathcal{R}(\lambda) < 0, \forall \lambda \in \sigma(A).$$

D'après [13] (page 17), « pour le système linéaire invariant dans le temps

$$\dot{x} = Ax \tag{2.6}$$

stabilité asymptotique, stabilité exponentielle et leurs versions globales sont toutes équivalentes à la propriété que A est une matrice de *Hurwitz* ». Si on fixe arbitrairement une matrice symétrique définie positive Q et on trouve l'unique matrice symétrique définie positive P qui satisfait l'équation de Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q$$

on obtient une fonction quadratique de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ dont la dérivée le long des solutions est $\dot{V}(x) = -x^T Q x$. La formule explicite pour P est

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} A e^{A t} dt.$$

En effet, puisque A est de Hurwitz,

$$A^T P + P A = \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(e^{A^T t} A e^{A t} \right) dt = -Q.$$

Le théorème 2.1.3 peut être adapté au cas d'un système non linéaire. Pour ce faire, on linéarise ce dernier. Mais on parle cette fois de la stabilité locale c'est-à-dire qu'à ce niveau on ne peut pas choisir la boule de rayon δ de la relation 2.2 aussi grand qu'on désire.

Théorème 2.1.4. ([25], (page 90)) Soit $\dot{x} = F(x)$ un système dynamique non linéaire. Soit la matrice $A = \frac{\partial F}{\partial x} \big|_0$

- Si $\forall \lambda \in \sigma(A), \mathcal{R}(\lambda) < 0$ alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.
- S'il existe $\forall \lambda \in \sigma(A), \mathcal{R}(\lambda) > 0$ alors le point d'équilibre est instable.
- Si $\forall \lambda \in \sigma(A), \mathcal{R}(\lambda) \leq 0$ et qu'au moins pour un $\lambda_i \in \sigma(A), \lambda_i = 0$ ($\mathcal{R}(\lambda_i) = 0$) alors on ne peut rien conclure.

Dans le théorème de Lyapunov 2.1.1 on distingue bien deux stabilités (simple et asymptotique) avec le fait que la fonction de Lyapunov peut être *faible* ($\dot{V}(x) \leq 0$) ou pas ($\dot{V}(x) < 0$). Le principe d'invariance de LaSalle³, fournit des conditions supplémentaires pour conclure sur la stabilité asymptotique à partir d'une fonction de Lyapunov faible.

Définition : Un ensemble invariant \mathcal{I} pour un système dynamique $\dot{x} = F(x)$ est défini par

$$\mathcal{I} = \{x_0 \in \chi : x_0 \in \chi \implies \varphi^t(x_0) \in \mathcal{I}\}$$

où $\varphi^t(x_0)$ est le flot (solution) du système.

Un ensemble (positivement) *invariant* par rapport au système donné traduit le fait que toutes les solutions à partir de \mathcal{I} restent dans \mathcal{I} pour tous les temps futurs.

3. Voir, par exemple [16] (page 173), pour cette notion.

2.2. Introduction aux systèmes commutés

De manière succincte, un système commuté est considéré comme composé d'un ensemble fini de sous-systèmes dynamiques actifs l'un après l'autre selon une loi de commutation de sous-système. D'après [13] (page 4), « ce changement d'événement pour les systèmes commutés peut être classé comme suit :

- dépendant de l'état versus dépendant du temps ;
- autonome (non contrôlé) versus contrôlé.

On peut aussi avoir des combinaisons de plusieurs types de commutation ». Nous n'entrerons pas plus en détail⁴ sur ces différents modes de changement de sous-systèmes. Nous considérons, comme dans [3] (page 35), le cas de la commutation temporelle pour décrire un système commuté. Signalons aussi qu'il n'est tout de même pas facile de distinguer une commutation dépendante de l'état de celle dépendante du temps.

Définitions et notations ([3], (page 35)) : Soit Γ un ensemble d'indices. Un *système commuté* est constitué d'une famille de sous-systèmes dynamiques :

$$\dot{x}(t) = F_i(x(t), t) \quad (2.7)$$

avec

$$x \in \chi \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad F_i : \chi \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \chi \text{ et } i \in \Gamma \subset \mathbb{N}.$$

Les fonctions F_p sont supposés être suffisamment régulières (au moins localement Lipschitz). Le cas le plus simple est lorsque tous ces systèmes sont linéaires :

$$F_i(x) = A_i x, \quad A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

et l'ensemble d'indice est fini : $\Gamma = \{1, 2, \dots, m\}$.

Dans la famille 2.7 ci-dessus, seul un sous-système est actif à un instant donné. Pour définir un système commuté généré par la famille 2.7, nous avons besoin de la notion de *signal de commutation*. Il s'agit d'une fonction constante par morceaux $\sigma : [0, \infty[\longrightarrow \Gamma$. Une telle fonction σ a un nombre fini de discontinuités⁵ (que l'on appelle les *temps de commutation*) sur chaque intervalle de temps borné et prend une valeur constante sur chaque intervalle entre deux temps de commutation consécutifs. Le rôle de σ est de spécifier, à chaque instant t , l'indice $\sigma(t) \in \Gamma$ du sous-système actif, c'est-à-dire le système de la famille des sous-systèmes qui est actuellement activé. Nous supposons que σ est continu partout à droite : $\sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow t+} \sigma(\tau)$ pour chaque $\tau \geq 0$.

Nous noterons par la suite $\mathcal{S}(\Gamma)$, l'ensemble des fonctions constantes par morceaux, définies sur \mathbb{R}^+ , à valeurs dans Γ , et qui respectent la propriété de non Zénon. Le phénomène de Zénon pour un système commuté est expliqué dans [16] (page 11) avec l'exemple d'une balle qui rebondit sur le sol. Dans ce cas, la commutation dépend de l'état et intervient chaque fois que la balle touche le sol. Pour cet exemple, la suite des temps de commutation donnée par $2, 2 + 2r, 2 + 2r + 2r^2, 2 + 2r + 2r^2 + 2r^3, \dots$ (avec $r \in]0, 1[$; le coefficient de restitution) admet un point d'accumulation qui est la somme de la série géométrique

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2r^k = \frac{2}{1-r}.$$

Ce qui traduit le fait que la balle fait une infinité de rebonds en un temps fini.

Formellement, on représente alors un système commuté par

$$\dot{x}(t) = F_{\sigma(t)}(x(t), t), \quad \text{avec } x \in \chi \subset \mathbb{R}^n \text{ et } \sigma(t) \in \mathcal{S}(\Gamma)$$

4. Voir, par exemple [16], pour plus de détails.

5. On dit qu'elle ne présente pas de phénomène de Zénon. Voir [16] pour les détails de cette propriété.

2. Généralités sur la stabilité et les systèmes commutés

où $\sigma : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \Gamma$ est la loi de commutation.

Dans les systèmes que nous étudions, les champs de vecteurs sont autonomes, dans le sens où ils ne dépendent pas du temps. Nous utiliserons par la suite la description

$$\dot{x} = F_\sigma(x), \quad x \in \chi \subset \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma). \quad (2.8)$$

Et

$$\dot{x} = A_\sigma(x), \quad x \in \chi \subset \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma)$$

dans le cas particulier d'un système commuté linéaire.

Partant d'un état initial $x_0 \in \chi$, pour une loi de commutation σ donnée, l'évolution (trajectoire) de l'état du système commuté tout au long du temps est notée $x(t, x_0, \sigma)$.

Exemples Voici six systèmes commutés non linéaires. Ces derniers nous permettront, tout au long de ce travail, d'illustrer la méthode que nous allons développer. D'autres exemples seront précisés chaque fois qu'il le faudra.

$$(systc1) \equiv \begin{cases} \dot{x} = -2x - x^3 - 5y - y^3 \\ \dot{y} = 6x + x^3 - 3y - y^3 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 - x^3 \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases}, \quad (2.9)$$

$$(systc2) \equiv \begin{cases} \dot{x} = -0.687x + 0.558y - 0.0001xy \\ \dot{y} = -0.292x - 0.773y \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \dot{x} = -0.369x + 0.532y - 0.0001x^2 \\ \dot{y} = -1.27x - 0.12y - 0.0001xy \end{cases}, \quad (2.10)$$

$$(systc3) \equiv \begin{cases} \dot{x} = -x + y^3 \\ \dot{y} = -y - xy^2 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x + xy \\ \dot{y} = -2y - x^2 \end{cases}, \quad (2.11)$$

$$(systc4) \equiv \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y^3 - 2y^4 \\ \dot{y} = -x - y - xy \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x + y^2 \\ \dot{y} = -y - x^2 \end{cases}, \quad (2.12)$$

$$(systc5) \equiv \begin{cases} \dot{x} = -x - xy^2 \\ \dot{y} = -3y + x^2y \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases} \quad (2.13)$$

et

$$(systc6) \equiv \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x + \frac{1}{3}x^3 - y \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x - y + x^2y \end{cases}. \quad (2.14)$$

Remarquons que pour ces exemples la loi de commutation n'est pas encore précisée.

2.3. Problématique de la stabilité des systèmes commutés

Dans l'introduction, nous avons évoqué les trois grands problèmes concernant l'étude de la stabilité des systèmes commutés :

1. Trouver des conditions garantissant la stabilité d'un système commuté pour n'importe quelle loi de commutation.
2. Identifier la (les) loi(s) de commutation pour laquelle (lesquelles) le système commuté est stable.
3. Construire une (des) loi(s) de commutation qui stabilise(nt) le système commuté.

Pour bien nous situer dans le problème qui nous occupe, nous montrerons dans cette section, à travers quelques exemples, à quel point cette étude est loin d'être intuitive. D'après [13] (page 14), « le premier problème est pertinent lorsque le mécanisme de commutation est inconnu ou trop compliqué pour être utile dans l'analyse de stabilité. Lors de l'étude de ce problème, on est amené à rechercher des sources d'instabilité, ce qui, à son tour, donne un aperçu du second problème qui est quant à lui plus pratique ».

2. Généralités sur la stabilité et les systèmes commutés

Une grande attention à l'étude de la stabilité des systèmes commutés est donc importante vue leur complexité. Comme signalé dans [3] (page 36) « l'évolution de l'état est gouvernée tant par les champs de vecteurs que par le signal de commutation. Dès lors, les concepts de stabilité peuvent être définis

- seulement sur l'état continu x , et ce indépendamment du signal de commutation : on parlera de **propriété uniforme** (sous entendu par rapport à σ). Ce travail portera exclusivement sur cette propriété,
- sur l'état x , et ce pour un signal de commutation : on parlera de **propriété conditionnelle** (sous entendu par rapport à une évolution de σ donnée) ».

Dans ce qui suit, nous supposons que l'origine est un point d'équilibre commun à tous les sous-systèmes

$$F_i(0) = 0, \forall i \in \Gamma \subset \mathbb{N}.$$

Nous présentons ici les définitions adaptées, liées aux stabilités simple et asymptotique, au cas des systèmes commutés. Les autres stabilités peuvent être définies de manière analogue.

Définitions ([3] (page 39)) : L'origine est un point d'équilibre du système 2.8

- *uniformément stable* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x(0)\| \leq \delta \implies \|x(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t > 0, \forall \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma);$$

- *conditionnellement stable* par rapport à σ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon, \sigma) > 0 \text{ tel que } \|x(0)\| \leq \delta \implies \|x(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t > 0;$$

- *uniformément asymptotiquement stable* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x(0)\| \leq \delta \implies \|x(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t > 0, \forall \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma)$$

et

$$\|x(0)\| \leq \delta \implies x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma);$$

- *conditionnellement asymptotiquement stable* par rapport à σ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon, \sigma) > 0 \text{ tel que } \|x(0)\| \leq \delta \implies \|x(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t > 0$$

et

$$\|x(0)\| \leq \delta \implies x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Nous présentons ci-dessous trois exemples illustrant que la stabilité d'un système commuté est contre intuitive. Considérons les systèmes commutés linéaires suivants :

1. (syst1)

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 13y \\ \dot{y} = 2x - 3y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 10x - 3y \end{cases}.$$

Nous avons deux sous-systèmes stables. En effet, le spectre de la matrice A_i correspondant à chaque sous-système est respectivement donné par $\sigma(A_1) = \{-2 \pm 5i\}$ et $\sigma(A_2) = \{-1 \pm 4i\}$.

2. (syst2)

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x} = 3y \\ \dot{y} = -x - 4y \end{cases}. \quad (2.15)$$

Il s'agit encore de deux sous-systèmes stables ; $\sigma(A_1) = \{-2\}$ ⁶ et $\sigma(A_2) = \{-1, -3\}$.

6. -2 est une valeur propre double.

3. (syst3)

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = -3x + 2y \end{cases}.$$

Le premier sous-système est stable tandis que le second est instable ; $\sigma(A_1) = \{-3\}$ et $\sigma(A_2) = \{2\}$ ⁷.

Nous pouvons de plus nous convaincre de ces stabilités à travers la figure 2.1 où nous avons considéré la condition initiale $(x_0, y_0) = (0.2, 0.2)$

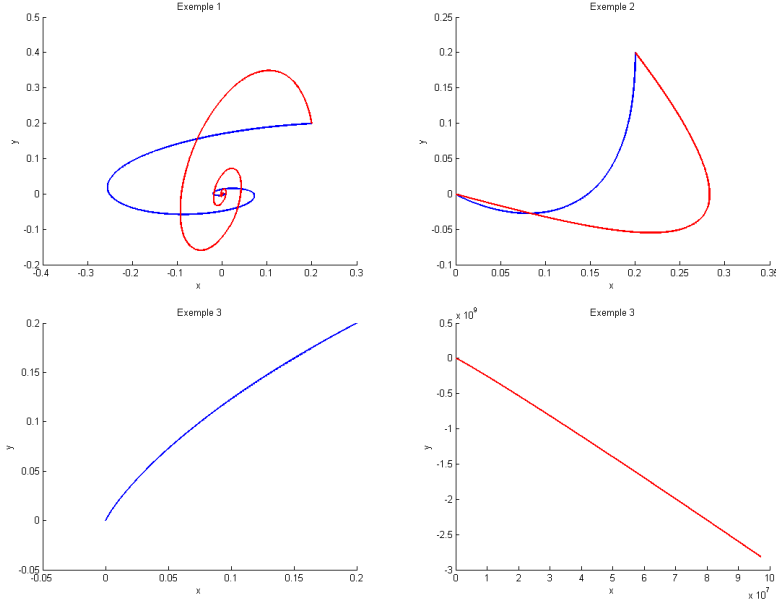


FIGURE 2.1. – Dans l'ordre les 3 exemples pour chacun des sous-systèmes pris individuellement. La trajectoire bleue (resp. rouge) représente le premier (resp. deuxième) sous-système. Pour le premier et le deuxième exemples les trajectoires de deux sous-systèmes sont sur le même graphe.

Gardons la même condition initiale et observons ce qui se passe avec les trois exemples lorsque nous considérons la relation de commutation : *(syst1) actif si $xy \leq 0$ et (syst2) actif si $xy > 0$* .

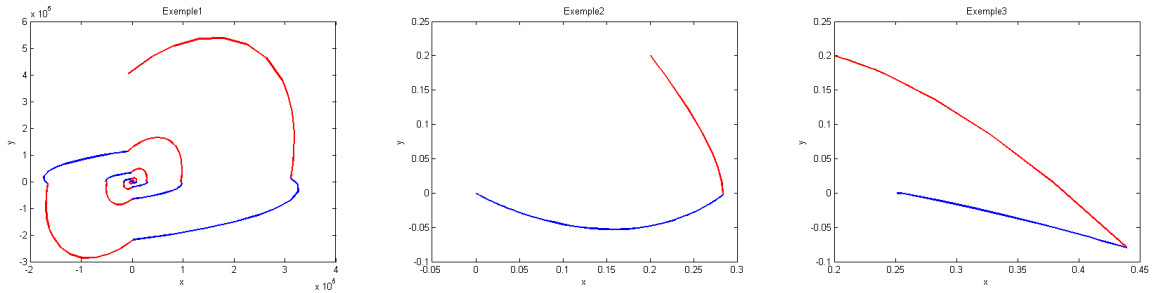


FIGURE 2.2. – Dans l'ordre les 3 exemples pour le modèle commuté. La trajectoire bleue (resp. rouge) représente le premier (resp. deuxième) sous-système.

Sur la figure 2.2, nous remarquons que la séquence de commutation considérée conduit à l'instabilité du modèle commuté du premier exemple et à la stabilité pour les deux derniers.

7. Il s'agit des valeurs propres doubles.

D'après [13] (page 20), « une condition nécessaire de stabilité (asymptotique) d'un système commuté sous la commutation arbitraire est que tous les sous-systèmes soient individuellement (asymptotiquement) stables. En effet, si le k ème sous-système est instable pour un $k \in \Gamma$, le système commuté est instable pour $\sigma(t) \equiv k$ ». Par conséquent, il sera supposé que tous les sous-systèmes individuels sont (asymptotiquement) stables. Mais la condition précédente ne suffit⁸ pas pour la stabilité asymptotique d'un système commuté sous une commutation arbitraire. Ainsi, a-t-on besoin de déterminer quelles sont les conditions supplémentaires sur les sous-systèmes qui doivent être imposées.

2.4. Stabilité uniforme des systèmes commutés

Dans cette section, nous présentons différents résultats relatifs à la stabilité uniforme des systèmes commutés. Nous mettons en exergue le fait que bon nombre d'entre eux concernent les systèmes commutés linéaires et que très peu de résultats existent pour le cas non linéaire.

2.4.1. Fonction de Lyapunov commune

D'après [3] (page 52), la courbe de niveau $V(x_0) = cste$ de la fonction de Lyapunov $V(x)$ permet de délimiter un domaine dans lequel la trajectoire d'un système est contrainte de converger vers le point d'équilibre. On peut donc aussi s'y intéresser pour le système commuté. Pour ce faire, on exige l'existence d'une fonction de Lyapunov commune pour tous les sous-systèmes. Cela conduit au fait que, quel que soit le changement de sous-système, le domaine délimité par la courbe de niveau de la fonction de Lyapunov d'un sous-système est strictement inclus dans l'autre. Ainsi, la trajectoire de l'ensemble pourra toujours converger vers l'origine.

On peut s'intéresser à obtenir une condition de Lyapunov pour la stabilité uniforme asymptotique ou exponentielle globale (GUAS, GUES. De l'anglais *global uniform asymptotic stability* et *global uniform exponential stability*).

Définition ([16] (page 22)) : Etant donné une fonction C^1 $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie positive, nous dirons qu'elle est une *fonction de Lyapunov commune* pour la famille de sous-systèmes s'il existe une fonction continue $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie positive telle que

$$\frac{\partial V}{\partial x} F_i(x) \leq -W(x) \quad \forall x, \quad \forall i \in \Gamma.$$

Le plus grand intérêt de la fonction de Lyapunov commune est présentée par le théorème 2.4.1 ci-dessous. Avant d'en énoncer le résultat, deux hypothèses sont supposées sur les sous-systèmes⁹

- la famille des sous-systèmes est équibornée, c'est-à-dire

$$\sup_{i \in \Gamma} \|F_i(x)\| < +\infty, \quad \forall x \in \chi \subseteq \mathbb{R}^n;$$

- la famille des sous-systèmes est localement uniformément Lipschitz, c'est-à-dire pour tout $\delta \in \mathbb{N}$, il existe $l_\delta \geq 0$ tel que

$$\|F_i(x) - F_i(y)\| \leq l_\delta \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{B}_\delta \times \mathcal{B}_\delta, \quad \forall i \in \Gamma.$$

Théorème 2.4.1. [18] *Sous les deux hypothèses ci-dessus, le système commuté est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction de Lyapunov commune à tous les sous-systèmes.*

8. L'exemple 3 ci-dessus en constitue la preuve.

9. Ces hypothèses sont satisfaites si Γ est fini. Voir [3] (page 50).

2. Généralités sur la stabilité et les systèmes commutés

Dans [13] (page 21) le théorème suivant est une condition de suffisance de la fonction de Lyapunov commune par rapport à la GUAS d'un système commuté.

Théorème 2.4.2. *Si tous les sous-systèmes partagent une fonction de Lyapunov commune radialement non bornée, alors le système commuté est GUAS.*

Considérons maintenant le système linéaire commuté. Supposons que $\{A_i : i \in \Gamma\}$ est un ensemble compact (par rapport à la topologie habituelle dans $\mathbb{R}^{n \times n}$) de matrices de Hurwitz. Le résultat suivant, tiré de [13] (page 24), établit l'équivalence entre l'attractivité locale et la GUES pour un système linéaire commuté.

Théorème 2.4.3. *Le système linéaire commuté est GUES si et seulement s'il est localement attractif pour tout signal de commutation.*

Tout comme pour le système linéaire sans commutation, ici il est aussi naturel de considérer des fonctions quadratiques de Lyapunov communes, c'est-à-dire des fonctions de la forme $V(x) = x^T P x$ de telle sorte que, pour une matrice symétrique définie positive Q , nous ayons

$$A_i^T P + P A_i \leq -Q \quad \forall i \in \Gamma. \quad (2.16)$$

On obtient un système d'inégalités matricielles linéaires (LMI) en P à résoudre. Ces LMIs nous seront très utiles pour la suite de notre travail. Signalons néanmoins, tel que précisé dans [16] (page 28), qu'il n'est pas suffisant de travailler avec les fonctions quadratiques de Lyapunov communes. En effet, on montre que, pour le système commuté linéaire formé par les sous-systèmes dont les matrices de base sont

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0.1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

la GUES n'entraîne pas l'existence d'une fonction quadratique de Lyapunov commune. Ce contre-exemple est exploité dans [6] et repris dans [16] (page 28).

2.4.2. Commutation entre champs de vitesse

Une autre approche pour étudier la stabilité des systèmes linéaires commutés se penche sur les relations de commutation¹⁰ Pour le cas des systèmes linéaires commutés le résultat suivant est établi :

Théorème 2.4.4. *([13] (page 28)) Si $\{A_i : i \in \Gamma\}$ est un ensemble fini de matrices de Hurwitz qui commutent, alors le système linéaire commuté correspondant est GUES.*

L'établissement de ce résultat fait recours à la construction, de manière itérative, d'une fonction de Lyapunov quadratique commune telle que prouvée dans [26].

Théorème 2.4.5. *Soient P_1, \dots, P_m les uniques matrices symétriques définies positives satisfaisant les équations de Lyapunov*

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -I$$

et

$$A_i^T P_i + P_i A_i = -P_{i-1}, \quad i = 2, \dots, m.$$

Alors la fonction $V(x) = x^T P_m x$ est une fonction de Lyapunov quadratique commune des sous-systèmes linéaires.

En ce qui concerne le cas non linéaire, l'extension consiste à considérer le crochet de Lie, ou commutateur, de deux \mathcal{C}^1 champs de vecteurs défini par

$$[F_1, F_2](x) := \frac{\partial F_2(x)}{\partial x} F_1(x) - \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} F_2(x).$$

Si le crochet de Lie de deux champs de vecteurs est identiquement nul, on dit que les deux champs de vecteurs commutent. Le résultat général est

¹⁰. A ne pas confondre avec la commutation des sous-systèmes qui désigne le passage d'un sous-système à l'autre.

Théorème 2.4.6. ([13] (page 29)) Si $\{F_i : i \in \Gamma\}$ est un ensemble fini de champs de vecteurs \mathcal{C}^1 qui commutent et si l'origine est un équilibre globalement asymptotiquement stable pour tous les sous-systèmes, alors le système commuté correspondant est GUAS.

2.4.3. Algèbre de Lie engendrée par les champs de vitesse

Pour étendre encore plus les résultats obtenus pour le cas de la commutation entre les champs de vitesse, des structures encore plus générales ont été considérées. Les outils de cette sous-section nous seront très utiles dans notre démarche par la suite. Commençons par définir quelques termes.

Définitions ([16](page 181)) : Étant donné une algèbre de Lie \mathcal{G} , considérons

- la séquence descendante des idéaux $\mathcal{G}^{(k)}$ de \mathcal{G} est définie inductivement comme suit :

$$\mathcal{G}^{(1)} := \mathcal{G}, \quad \mathcal{G}^{(k+1)} := [\mathcal{G}^{(k)}, \mathcal{G}^{(k)}] \subset \mathcal{G}^{(k)}.$$

Si $\mathcal{G}^{(k)} = 0$ pour k suffisamment grand, alors \mathcal{G} est dite *résoluble*

- la séquence descendante des idéaux \mathcal{G}^k par

$$\mathcal{G}^1 := \mathcal{G}, \quad \mathcal{G}^{k+1} := [\mathcal{G}, \mathcal{G}^k] \subset \mathcal{G}^k,$$

Si $\mathcal{G}^k = 0$ pour k suffisamment grand, alors \mathcal{G} est dite *nilpotente*

Notons que toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble, mais l'inverse n'est pas vrai.

Dans le cas linéaire le tout premier résultat est le théorème 2.4.7 ci-dessous qui exploite la structure de triangulation simultanée des matrices d'état.

Théorème 2.4.7. ([24]) Considérons le système linéaire commuté. Si toutes les matrices d'état sont de Hurwitz et s'il existe une matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible telle que toutes les matrices $T^{-1}A_iT, i \in \Gamma$ soient triangulaires supérieures (ou inférieures), alors il existe une fonction de Lyapunov quadratique commune $V(x) = x^T Px$ pour la famille des systèmes $\dot{x} = A_i x, i \in \Gamma$ et le système commuté est uniformément asymptotiquement stable.

Considérons l'algèbre de lie $\mathcal{G} = \{A_i : i \in \Gamma\}_{LA}$ engendrée par les matrices $\{A_i : i \in \Gamma\}$. Le résultat suivant généralise le précédent dans le sens que, d'après le théorème de Lie, si on a des matrices qui forment une algèbre de Lie résoluble alors elles sont simultanément triangularisables.

Théorème 2.4.8. ([12] (page 119)) Si $\{A_i : i \in \Gamma\}$ est un ensemble compact de matrices de Hurwitz et l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = \{A_i : i \in \Gamma\}_{LA}$ est résoluble, alors le système linéaire commuté est GUES.

Dans le cas des systèmes linéaires, les conditions de stabilité sont globales. On peut ainsi, en utilisant la méthode indirecte de Lyapunov, les appliquer localement aux systèmes non linéaires. On considère le système linéarisé $\dot{x} = A_\sigma = \frac{\partial F_\sigma}{\partial x}(0)x$. On obtient le résultat suivant

Théorème 2.4.9. ([13] (page 31)) Supposons que les matrices de linéarisation $A_i, i \in \Gamma$ sont de Hurwitz, Γ est un ensemble compact, et $\frac{\partial F_i}{\partial x}(x)$ dépend continûment de i pour chaque x dans un voisinage de l'origine. Si l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = \{A_i, i \in \Gamma\}_{LA}$ est résoluble, alors le système non linéaire commuté est localement uniformément exponentiellement stable.

Il nous faut préciser, tel qu'indiqué dans [3] (page 57) et [13] (page 121), « la non robustesse de ces critères algébriques (triangulation simultanée, nilpotence, résolubilité,...). Autrement dit ces propriétés peuvent être perdues pour de petites perturbations alors que la stabilité exponentielle et l'existence d'une fonction de quadratique de Lyapunov commune sont des propriétés robustes ».

Une autre tentative a été de considérer, à la lumière du cas linéaire, les structures de l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs non linéaires et de s'y référer pour étudier la stabilité uniforme globale des systèmes commutés non linéaires. Dans [2] il est démontré que la structure triangulaire seule n'est pas suffisante pour la stabilité dans le cas non linéaire. Les conditions supplémentaires à imposer pour garantir la stabilité y sont identifiées. Les résultats présentés à la sous-section suivante se sont intéressés à cette problématique.

2.4.4. Crochet entre les champs de vitesse

Dans ce qui précède, nous observons que laplupart des résultats cités portent sur les systèmes linéaires commutés. Leur généralisation au cas non linéaire utilise, bien souvent, la méthode indirecte de Lyapunov. De plus, la stabilité globale du système linéarisé est équivalente à la stabilité locale du système non linéaire. Il existe une autre approche qui consiste à étudier les systèmes commutés non linéaires sans devoir les linéariser. C'est en suivant cette piste que dans [15] (page 206), D. Liberzon propose un problème ouvert portant sur l'étude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires :

*« Which structural properties (if any) of the Lie algebra generated by a noncommuting family of asymptotically stable nonlinear vector fields guarantee stability of every corresponding switched system ?
For example, when does nilpotency or solvability of the Lie algebra imply stability ? »*

Ce problème est partiellement résolu dans [19] où le résultat suivant est obtenu¹¹. On définit l'opérateur $(adF)^r$, $r = 0, 1, \dots$ par $(adF)^0(G) := G$ et $(adF)^r(G) := [F, (adF)^{r-1}(G)]$ pour $r \geq 1$, où F et G sont deux champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n .

Théorème 2.4.10. *Soient les champs de vecteurs F_0, F_1, \dots, F_m tels que les sous-systèmes soient individuellement globalement asymptotiquement stables. Supposons qu'il existe un entier positif r tel que pour tout $l \in \{0, 1, \dots, m\}$ on ait*

$$(adF_l)^r(F_i)(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \neq l, \quad (2.18)$$

et

$$[F_k - F_l, (adF_l)^s(F_i - F_l)](x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i, k \neq l, \quad s = 0, \dots, r-1. \quad (2.19)$$

Alors le système commuté non linéaire est GUAS.

Remarquons que la première condition ci-dessus est équivalente à la condition de nilpotence d'ordre r . Un des premiers cas particuliers de ce résultat est celui où les champs de vecteurs commutent. Nous nous intéressons, dans ce travail, au cas où les champs de vitesse forment une base de l'algèbre de Lie qu'ils engendrent. Dans ce cas, nous montrerons que la condition 2.18 entraîne la nilpotence (la résolubilité par ricochet) de l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs de Koopman.

L'autre cas particulier, étudié dans [27], est celui d'un système commuté non linéaire composé de deux champs de vecteurs qui forment une algèbre de Lie nilpotente. Le résultat pour ce cas s'énonce comme suit

Corollaire 2.4.11. *([19] (page 4)) Soient F_0, F_1 deux champs de vecteurs analytiques sur \mathbb{R}^n tels que les sous-systèmes soient individuellement globalement asymptotiquement stables. Supposons que*

$$[F_0, [F_0, F_1]](x) = [F_1, [F_0, F_1]](x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors le système commuté non linéaire est GUAS.

¹¹. La version originale de l'énoncé utilise la notion d'inclusion différentielle, que nous omettons ici, pour en déduire la GUAS du système commuté non linéaire.

2. Généralités sur la stabilité et les systèmes commutés

L'équivalent linéaire du corollaire 2.4.11 a été obtenu, pour le système commuté à temps discret, dans [8]. Nous montrerons, dans ce travail, que le corollaire 2.4.11 est équivalent à la résolubilité de l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs de Koopman associés aux deux sous-systèmes respectifs.

Nous tenterons aussi d'apporter quelques réponses supplémentaires au problème de D. Liberzon ci-dessus. Pour y parvenir, nous utiliserons l'opérateur de Koopman. Nous proposerons ainsi la possibilité d'envisager ce problème via les structures de l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs de Koopman et non plus celle engendrée par les champs de vitesse.

Opérateur de Koopman associé à un système dynamique

Sommaire

3.1. Opérateur de Koopman	23
3.1.1. Dans le cas discret	23
3.1.2. Dans le cas continu	25
3.1.3. Éléments propres de l'opérateur de Koopman	26
3.2. Matrice de Koopman	27
3.2.1. Système en 1D	27
3.2.2. Système en 2D	29
3.2.3. Projection de la matrice de Koopman	31

Ce chapitre constitue une présentation succincte de l'opérateur de Koopman. Ce dernier sera défini dans le cadre des systèmes dynamiques à temps discret et à temps continu. Après une brève présentation de l'opérateur de Koopman, nous nous concentrons sur la réalisation de celui-ci dans la base de monômes. Une fois la base fixée, nous obtenons la matrice représentative de l'opérateur de Koopman qui permet alors de décrire son action sur les fonctions observables.

3.1. Opérateur de Koopman

L'approche classique pour décrire un système dynamique considère les trajectoires de manière individuelle : à chaque instant correspond un point (un état). La nouvelle approche, basée sur l'opérateur de Koopman, décrit le même système mais de manière globale. Cette dernière consiste à étudier le comportement des observables sur l'espace des états X . On définit un observable comme étant une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C})$. Celui-ci est un élément d'un espace vectoriel de fonctions \mathcal{F} . Un observable peut être par exemple une des composantes x_i du système, l'énergie d'un système mécanique, la vitesse, etc...

3.1.1. Dans le cas discret

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ l'espace des états. Classiquement, un système dynamique à temps discret est décrit par l'application $T : X \rightarrow X$ définie par

$$x_n = T(x_{n-1}) \quad \text{ou} \quad x_n = T^n(x_0)$$

où $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ fois}}$. L'état x_0 est la condition initiale.

3. Opérateur de Koopman associé à un système dynamique

Définition ([4] (page 5)) : L'opérateur de Koopman (temps discret) associé à T , $U_T : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$, est défini par

$$(U_T f)(x) = f(T(x)),$$

i.e, c'est la composition, $U_T f = f \circ T$, de l'observable f et de l'application T .

D'après [4] (page 5), si X est un ensemble fini, l'opérateur de Koopman est de dimension finie et peut être représenté de manière exacte par une matrice. Si X est un ensemble infini (par exemple un sous-ensemble dense dans \mathbb{R}^n), U_T est un opérateur de dimension infinie, quelle que soit la dimension de X (finie ou infinie).

Propriété : L'opérateur de Koopman U_T est linéaire.¹

En effet, soient $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Nous avons

$$\begin{aligned} U_T(\alpha f_1 + \beta f_2) &= (\alpha f_1 + \beta f_2) \circ T \\ &= \alpha f_1 \circ T + \beta f_2 \circ T \\ &= \alpha U_T f_1 + \beta U_T f_2. \end{aligned}$$

L'exemple suivant, tiré de [4] (page 5), montre comment l'action de U_T peut être définie par une matrice.

Exemple : groupe cyclique. Soit $X = \{e, a, a^2\}$ un groupe cyclique d'ordre 3 ($a^3 \equiv e$). Définissons l'application $T : X \longrightarrow X$ par

$$T(x) = a.x,$$

pour $x \in X$. Soit \mathcal{F} l'espace des fonctions de X à valeurs dans \mathbb{C} . Soient f_1, f_2, f_3 les fonctions indicatrices sur e, a, a^2 respectivement :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x = e \\ 0, & x \neq e \end{cases}, \quad (3.1)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}, \quad (3.2)$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1, & x = a^2 \\ 0, & x \neq a^2 \end{cases}. \quad (3.3)$$

Ces fonctions forment une base de \mathcal{F} . D'après les relations 3.1, 3.2 et 3.3, l'action de l'opérateur de Koopman sur cette base est donnée par

$$\begin{aligned} (U_T f_1)(x) &= f_1(a.x) = f_3(x) \\ (U_T f_2)(x) &= f_2(a.x) = f_1(x) \\ (U_T f_3)(x) &= f_3(a.x) = f_2(x). \end{aligned}$$

Pour toute fonction observable $f \in \mathcal{F}$ donnée par $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3$, avec $c_i \in \mathbb{C}$, on a par linéarité de U_T

$$\begin{aligned} U_T f &= U_T(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3) \\ &= c_1 U_T f_1 + c_2 U_T f_2 + c_3 U_T f_3 \\ &= c_1 f_3 + c_2 f_1 + c_3 f_2. \end{aligned}$$

Alors, la matrice représentative de U_T dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ est donnée par

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'action de U_T peut alors être entièrement décrite par la matrice \mathbf{M} .

1. Ceci explique un grand intérêt à étudier ses propriétés spectrales que nous ne développerons pas dans ce travail.

3.1.2. Dans le cas continu

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ l'espace des états. Classiquement, un système dynamique à temps continu est décrit par l'équation différentielle

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in X \quad (3.4)$$

où $F : X \rightarrow X$ est le champ de vitesse (vecteurs). La trajectoire du système est donnée par

$$x(t) = \varphi^t(x_0)$$

avec x_0 l'état (la condition) initial(e) et $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le flot. La trajectoire $\{\varphi(x_0, \cdot)\}_{t \geq 0}$ est la solution du problème de Cauchy

$$\dot{x} = F(x); \quad x(0) = x_0.$$

On dit aussi que le flot φ est induit par le système dynamique 3.4. Considérons à présent un espace (de Banach) \mathcal{F} des observables $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}). Nous supposons que les observables sont des fonctions continues, c'est-à-dire $\mathcal{F} \subseteq C^0(X)$. L'opérateur de Koopman associé au flot φ est défini sur \mathcal{F} comme suit :

Définition ([4] (page 5)) : Le semi-groupe d'opérateurs de Koopman $U^t : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ associé au flot φ est défini par

$$U^t f = f \circ \varphi^t, \quad f \in \mathcal{F}.$$

Il ne s'agit pas ici d'un opérateur de Koopman mais d'un semi-groupe (d'opérateurs) de Koopman $(U^t)_{t \in \mathbb{R}^+}$. En effet, d'après [11] (page 177), soient $t, t' \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}$ et $x \in X$, nous avons

$$\begin{aligned} U^{t+t'} f(x) &= f(\varphi^{t+t'}(x)) \\ &= f(\varphi^t(\varphi^{t'}(x))) \\ &= U^t f(\varphi^{t'}(x)) \\ &= U^t (U^{t'} f(x)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U^0 f(x) &= f(\varphi^0(x)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe est défini (d'une manière générale) par

$$L_U = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U^t - Id}{t}.$$

D'après [20] (page 2), l'action de L_U sur une fonction observable $f \in \mathcal{F} \subseteq C^1(X)$ est définie par la relation

$$L_U f = F \cdot \nabla f. \quad (3.5)$$

Pour développer notre méthode, la relation 3.5 nous sera très utile dans la suite. Elle nous permettra d'obtenir une représentation approximative de l'opérateur de Koopman en dimension finie (voir la section 3.2).

Propriété : Comme dans le cas temps discret, l'opérateur de Koopman U^t est linéaire. Il en est de même pour le générateur infinitésimal L_U .

En effet, soit $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} L_U (\alpha f_1 + \beta f_2) &= F \cdot \nabla (\alpha f_1 + \beta f_2) \\ &= F \cdot (\alpha \nabla f_1 + \beta \nabla f_2) \\ &= \alpha F \cdot \nabla f_1 + \beta F \cdot \nabla f_2 \\ &= \alpha L_U f_1 + \beta L_U f_2. \end{aligned}$$

3.1.3. Éléments propres de l'opérateur de Koopman

Dans cette sous-section nous décrivons brièvement les éléments propres de l'opérateur de Koopman. Précisons tout de même que ceux-ci ne seront pas utilisés dans notre méthode.

Définitions ([21] (page 2)) : Le spectre de l'opérateur de Koopman est l'ensemble de scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$U^t \phi_\lambda = e^{\lambda t} \phi_\lambda \quad (3.6)$$

avec $\phi_\lambda \in \mathcal{F} \neq 0$. Les scalaires λ sont des valeurs propres de Koopman et les fonctions ϕ_λ sont les fonctions propres de Koopman associées. Si $F, \phi_\lambda \in C^1(X)$, l'équation aux valeurs propres peut être exprimée, d'après la relation 3.5, par

$$L_U \phi_\lambda = F \cdot \nabla \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda. \quad (3.7)$$

Une des propriétés de fonctions propres de Koopman est la structure de semi-groupe abélien qu'elles forment. Cette propriété est énoncée dans le théorème ci-après, tiré de [4] (page 7). L'espace \mathcal{F} est supposé fermé pour le produit de fonctions.

Théorème 3.1.1. *Si $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}$ sont des fonctions propres de U^t associées aux valeurs propres respectives λ_1 et λ_2 , alors leur produit $\phi_1 \phi_2$ est aussi fonction propre de U^t associée à la valeur propre $\lambda_1 + \lambda_2$ ². Ainsi, si $p \in \mathbb{R}^+$, ϕ est une fonction propre et $\phi^p \in \mathcal{F}$ alors ϕ^p est aussi fonction propre associée à la valeur propre $p\lambda$ ³, où $\phi^p(x) := (\phi(x))^p$. Si $r \in \mathbb{R}$, ϕ est une fonction propre non nulle partout et $\phi^r \in \mathcal{F}$, alors ϕ^r est aussi fonction propre associée à la valeur propre $r\lambda$.*

Plus encore, les propriétés spectrales de l'opérateur de Koopman interviennent dans l'étude de la stabilité d'un système dynamique. Ceci a fait l'objet des papiers [20] et [21].

Voici un exemple, inspiré de [4] (page 8), illustrant encore plus l'utilité des fonctions propres de Koopman.

Exemple : Soit $f \in \mathcal{F}$ un observable du sous-espace fermé engendré par les fonctions propres linéairement indépendantes $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ (supposons ici que n est fini). Dans ce cas,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x), \quad x \in X \quad (3.8)$$

où les $c_i = c_i(f) \in \mathbb{R}$ sont des constantes. La dynamique de f est donnée par :

$$\begin{aligned} (U^t f)(x) &= f(\varphi^t(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(\varphi^t(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i (U^t \phi_i)(x) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \phi_i(x) \end{aligned}$$

L'expression ci-dessus représente l'expansion spectrale de l'opérateur de Koopman. La constante c_i , appelée **mode de Koopman**, correspond à la projection de f sur la fonction propre ϕ_i . Notons que cette expansion n'est pas toujours possible et dans certains cas (systèmes chaotiques par exemple) il faut considérer la partie continue du spectre de l'opérateur. Voir [23] pour plus de détails.

2. Dans le cas discret on a $\lambda_1 \lambda_2$.

3. Dans le cas discret on a λ^p .

3.2. Matrice de Koopman

Dans cette section nous montrons comment transformer un système non linéaire dans X par l'action de l'opérateur de Koopman sur \mathcal{F} . Dans le cas des systèmes commutés, nous obtiendrons donc un système commuté linéaire sur \mathcal{F} . Nous détaillons ensuite la démarche à suivre pour obtenir, à partir d'un système dynamique donné, la représentation matricielle de l'opérateur de Koopman dans une base \mathcal{B} de dimension finie. La démarche consiste à déterminer, via la relation 3.5, l'action de L_U sur les éléments de \mathcal{B} pour en définir une matrice représentative. Tout au long de ce travail, nous convenons d'appeler **matrice de Koopman**, la matrice ainsi obtenue. Pour les matrices de Koopman, nous exploitons en premier lieu le cas des systèmes en une dimension. Cela va nous permettre de justifier ou de préciser les différentes restrictions faites sur les systèmes dynamiques à étudier dans ce travail. Nous considérerons ensuite le cas des systèmes en dimension 2, dont la généralisation aux systèmes en dimension n est relativement directe.

Nous commençons par montrer comment constituer un système linéaire dans l'espace des fonctions observables \mathcal{F} à partir d'un système non linéaire dans X . Cette approche nous sera très utile dans la mesure où beaucoup de méthodes, telles que rappelées dans le premier chapitre, concernent le cas linéaire. Posons

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2) \\ \psi(x) = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, \dots)^T. \end{cases}$$

Dans l'espace \mathcal{F} des fonctions observables, le vecteur $\psi(x)$ correspond à l'état x . Soit

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in X \quad (3.9)$$

un système dynamique. Soit $f(x)$ une fonction observable qui s'écrit dans la base de monômes, \mathcal{B} , sous la forme

$$f(x) = a^T \psi(x). \quad (3.10)$$

Nous avons

$$L_U f(x) = a^T \dot{\psi}(x). \quad (3.11)$$

Aussi d'après 3.10,

$$L_U f(x) = (\mathbf{L}a)^T \psi(x) = a^T \mathbf{L}^T \psi(x), \quad (3.12)$$

où \mathbf{L} est la matrice représentative de l'opérateur de Koopman L_U dans la base 3.15. Par les relations 3.11 et 3.12, nous avons

$$\dot{\psi}(x) = \mathbf{L}^T \psi(x) \quad (3.13)$$

Ce qui donne un système linéaire dans \mathcal{F} dont l'état est $\psi(x)$. Le système 3.13 nous sera très utile pour la transformation d'un système non linéaire commuté et pour la construction d'une fonction de Lyapunov commune.

3.2.1. Système en 1D

On considère ici un système dynamique de dimension 1, $\dot{x} = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, dont le champ de vitesse est polynomial, c'est-à-dire $F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. On choisit comme base des fonctions observables, la base infinie de monômes

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}.$$

Pour déterminer la matrice de l'opérateur de Koopman, exprimons son action sur les éléments de la base. De façon générale, soit x^k le k^{ie} élément de la base. D'après la relation 3.5, l'action de l'opérateur de Koopman sur x^k est donnée par

3. Opérateur de Koopman associé à un système dynamique

$$\begin{aligned}
(L_U x^k) &= F(x) \cdot \frac{dx^k}{dx} \\
&= (a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n) k x^{k-1} \\
&= k (a_0 x^{k-1} + a_1 x^k + a_2 x^{k+1} + a_3 x^{k+2} + \dots + a_n x^{k-1+n}).
\end{aligned}$$

Ainsi, la k^{ie} colonne⁴ de la matrice de Koopman sera formée comme suit ;

$$\begin{array}{rcl}
& & k^{ie} \text{ colonne} \\
& & 0 \\
& & 0 \\
& & \vdots \\
(k-1)^{ie} \text{ ligne} \longrightarrow & & k a_0 \\
k^{ie} \text{ ligne} \longrightarrow & & k a_1 \\
(k+1)^{ie} \text{ ligne} \longrightarrow & & k a_2 \\
(k+2)^{ie} \text{ ligne} \longrightarrow & & k a_3 \\
& & \vdots \\
(k-1+n)^{ie} \text{ ligne} \longrightarrow & & k a_n \\
& & 0 \\
& & 0 \\
& & \vdots
\end{array}$$

Ce qui donne pour un élément de la matrice de Koopman :

$$\mathbf{L}(i, k) = k * a_{i-k+1} \quad 0 < k < i \in \mathbb{N}.$$

Et la matrice de Koopman est de la forme

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & 2a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & 2a_1 & 3a_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_3 & 2a_2 & 3a_1 & 4a_0 & 0 & \dots \\ 0 & a_4 & 2a_3 & 3a_2 & 4a_1 & 5a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_n & 2a_{n-1} & 3a_{n-2} & 4a_{n-3} & 5a_{n-4} & \dots \\ 0 & 0 & 2a_n & 3a_{n-1} & 4a_{n-2} & 5a_{n-3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3a_n & 4a_{n-1} & 5a_{n-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Remarques :

- Si on choisit une base finie $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^d\}$, avec d fixé, on peut remarquer que la matrice de Koopman 3.14 est rectangulaire. Pour la rendre carrée, nous pouvons soit la tronquer à partir de la $(d+1)^{ie}$ ligne soit projeter les différentes colonnes sur la base finie fixée (voir la section 3.2.3).
- Si $a_0 = 0$, alors la première ligne de la matrice 3.14 est nulle. Ce qui sera toujours le cas pour les systèmes dynamiques considérés dans ce travail car ils admettent 0 comme point d'équilibre. D'où l'intérêt, pour éviter que 0 soit chaque fois une valeur propre, de supprimer la première ligne et bien évidemment la première colonne.

4. Il faut tenir compte, abusivement, de la colonne d'ordre 0 et de lignes d'ordre -1 et 0.

3. Opérateur de Koopman associé à un système dynamique

- Si $a_1 = 0$, alors la deuxième ligne⁵ de la matrice 3.14 deviendrait nulle aussi et 0 serait encore une fois une valeur propre. Dans ce cas l'équilibre 0 n'est pas hyperbolique. Ce qui est en désaccord avec les systèmes considérés dans ce travail. On considérera donc des systèmes tels que $a_1 \neq 0$ c'est-à-dire ceux qui font intervenir le terme linéaire dans les champs de vitesse.

3.2.2. Système en 2D

Soit le système dynamique en deux dimensions

$$\begin{cases} \dot{x} = F_1(x, y) \\ \dot{y} = F_2(x, y) \end{cases}$$

où les champs de vitesse sont donnés sous les formes $F_1(x, y) = \sum_{j,i=0}^n a_{ij} x^i y^j$ et $F_2(x, y) = \sum_{j,i=0}^n b_{ij} x^i y^j$. On choisit comme base de l'espace \mathcal{F} la base infinie de monômes

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} x^0 y^0 & x^1 y^0 & x^2 y^0 & x^3 y^0 & \dots & x^p y^0 & \dots \\ & x^0 y^1 & x^1 y^1 & x^2 y^1 & \dots & x^{p-1} y^1 & \dots \\ & & x^0 y^2 & x^1 y^2 & \dots & x^{p-2} y^2 & \dots \\ & & & x^0 y^3 & \dots & x^{p-3} y^3 & \dots \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & x^0 y^p & \dots \\ & & & & & & \vdots \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Chaque k^{ie} « colonne »⁶ de \mathcal{B} est composée de monômes de degré total égal à k . Une fois que d est fixé, le nombre d'éléments de la base c'est-à-dire le nombre de monômes de degré total inférieur ou égal à d est donné par la formule $N = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$.

Nous pouvons écrire les exposants des éléments de \mathcal{B} sous forme d'une table d'indice

$$\begin{aligned} index(1) &\rightarrow (0, 0) \\ index(2) &\rightarrow (1, 0) \\ index(3) &\rightarrow (0, 1) \\ index(4) &\rightarrow (2, 0) \\ index(5) &\rightarrow (1, 1) \\ index(6) &\rightarrow (0, 2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pour déterminer la matrice de l'opérateur de Koopman, on procède comme en dimension 1. De manière générale, soit $x^p y^k$ un élément de la base, l'action de l'opérateur de Koopman sur cet élément est donnée par

$$\begin{aligned} (L_U x^p y^k) &= \nabla (x^p y^k) \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p x^{p-1} y^k & k x^p y^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} \\ &= p x^{p-1} y^k F_1(x, y) + k x^p y^{k-1} F_2(x, y) \\ &= \sum_{j,i=0}^n p a_{ij} x^{i+p-1} y^{j+k} + \sum_{j,i=0}^n k b_{ij} x^{i+p} y^{j+k-1}. \end{aligned}$$

Pour calculer la c^e colonne de la matrice de Koopman \mathbf{L} , affectons au terme de base $x^p y^k$ l'indice $index(c) = (p, k)$. La dérivée partielle de $x^p y^k$ par rapport à x (resp. y) est donnée par $(p, k) - (1, 0)$

5. Ce sera la première ligne après suppression de la première ligne nulle de a_0 .

6. Il faut tenir compte, abusivement, de la colonne d'ordre 0 aussi.

3. Opérateur de Koopman associé à un système dynamique

(resp. $(p, k) - (0, 1)$). Ainsi, par exemple, le produit $pa_{ij}x^{i+p-1}y^{j+k}$ revient à ajouter pa_{ij} à la l^e ligne de \mathbf{L} telle que $index(l) = (i, j) + (p, k) - (1, 0)$:

$$\begin{array}{ccc} & c^e \text{ colonne} & \\ & \downarrow & \\ l^e \text{ ligne} & \rightarrow & +pa_{ij} \end{array} \quad (3.16)$$

où a_{ij} est le coefficient du terme $x^i y^j$ du champ de vitesse $F_1(x, y)$. Le raisonnement est le même pour les termes de $F_2(x, y)$ à condition d'utiliser la dérivée partielle par rapport à y . Voir l'annexe A.1.1 pour le code de calcul de la matrice de Koopman tronquée.

Exemples

Exemple 1 : Soit le système dynamique défini par

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + xy \\ \dot{y} = -2y - x^2 \end{cases} \quad (3.17)$$

La matrice de Koopman associée au système 3.20 est donnée, pour $d = 2$ c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$, par

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Pour $d = 3$ c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$, nous avons

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Exemple 2 : Soit le système dynamique défini par

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y^2 \\ \dot{y} = -y - x^2 \end{cases} \quad (3.20)$$

La matrice de Koopman associée au système 3.20 est donnée, pour $d = 2$, par

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

3. Opérateur de Koopman associé à un système dynamique

Pour $d = 3$, nous avons

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

3.2.3. Projection de la matrice de Koopman

Au lieu de tronquer à partir de la $(N + 1)^{ie}$ ligne de la matrice rectangulaire de Koopman, on peut tout simplement projeter chaque colonne sur la base déjà fixée. Nous explicitons dans cette sous-section comment obtenir la matrice carrée \mathbf{L} en utilisant la projection orthogonale. Cette sous-section est inspirée de [29] (pages 14-15).

Soient $V^\xi(\Omega)$ et $V^\psi(\Omega)$ des sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{F} = L^2(\Omega)$, avec $\Omega = [-1, 1]$, dont les bases de fonctions sont respectivement données par

$$\{\xi_1(x, y), \xi_2(x, y), \dots, \xi_m(x, y)\} \text{ et } \{\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \dots, \psi_N(x, y)\}, \text{ avec } N \leq m.$$

La première (resp. la deuxième) base désigne celle de m (resp. N) monômes de degré total inférieur ou égal à d' (resp. d'') fixé. Soit $u(x, y) = \sum_{j=1}^m u_j \xi_j(x, y)$ un élément⁸ de $V^\xi(\Omega)$. La projection sur $V^\psi(\Omega)$ de u , donnée par

$$u^p(x, y) = \sum_{j=1}^N u_j^p \psi_j(x, y),$$

satisfait à la condition d'orthogonalité

$$\langle u - u^p, v \rangle = 0, \quad \forall v \in V^\psi.$$

Ceci est équivalent au fait que la fonction erreur $u - u^p$ est orthogonale à toute fonction de la base du sous-espace V^ψ

$$\langle u - u^p, \psi_i \rangle = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{j=1}^m u_j \xi_j - \sum_{j=1}^N u_j^p \psi_j, \psi_i \right\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\langle \sum_{j=1}^m u_j \xi_j, \psi_i \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^N u_j^p \psi_j, \psi_i \right\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\langle \sum_{j=1}^N u_j^p \psi_j, \psi_i \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m u_j \xi_j, \psi_i \right\rangle \\ \Leftrightarrow & \sum_{j=1}^N u_j^p \langle \psi_j, \psi_i \rangle = \sum_{j=1}^m u_j \langle \xi_j, \psi_i \rangle \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Ceci revient à résoudre le système d'équations linéaires

$$Mu^p = Pu, \quad (3.23)$$

7. Nous avons bien évidemment $d \leq d'$.

8. Le vecteur u correspond alors à une colonne de la matrice rectangulaire de Koopman.

3. Opérateur de Koopman associé à un système dynamique

où

$$M_{ij} = \langle \psi_j, \psi_i \rangle = \int_{\Omega} \psi_j(x, y) \psi_i(x, y) dx dy \quad i, j = 1, \dots, N$$

et

$$P_{ij} = \langle \xi_j, \psi_i \rangle = \int_{\Omega} \xi_j(x, y) \psi_i(x, y) dx dy \quad i = 1, \dots, N \text{ et } j = 1, \dots, m$$

Précisément, dans notre cas, soit $\xi_i(x, y) = x^a y^b$ et $\psi_j(x, y) = x^c y^d$, nous avons

$$\begin{aligned} P_{ij} = \langle x^a y^b, x^c y^d \rangle &= \int_{[-1,1] \times [-1,1]} x^{a+c} y^{b+d} dx dy \\ &= \int_{[-1,1]} x^{a+c} dx \cdot \int_{[-1,1]} y^{b+d} dy \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } a+c+1 \text{ ou } b+d+1 \text{ est pair} \\ \frac{4}{(a+c+1)(b+d+1)} & \text{si } a+c+1 \text{ et } b+d+1 \text{ sont impairs} \end{cases} \end{aligned}$$

Une fois que P est calculée, la matrice M correspond à la sous-matrice $P(1 : N, 1 : N)$. Voir l'annexe A.1.2 pour le calcul de la matrice de Koopman projetée.

Remarques :

- Le choix de l'espace de Hilbert $L^2([-1, 1] \times [-1, 1])$ est arbitraire.
- Notons \mathbf{L}' la matrice de Koopman de taille $(m \times N)$ obtenue en appliquant l'opérateur de Koopman aux N fonctions $\psi_i(x, y)$, $i = 1, \dots, N$. Si $u(m, 1)$ est un vecteur-colonne de \mathbf{L}' la relation

$$u^p = M^{-1}(Pu) \tag{3.24}$$

permet d'obtenir le vecteur-colonne $u^p(N, 1)$ de \mathbf{L} . En réalisant l'opération sur toute colonne de \mathbf{L}' on obtient une matrice de Koopman carrée.

Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

Sommaire

4.1. Algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman	33
4.2. Nuances avec le résultat de D. Liberzon	40
4.3. Construction d'une fonction candidate de Lyapunov commune	42
4.4. Illustrations et discussions	43
4.4.1. Illustration 1	44
4.4.2. Illustration 2	45
4.4.3. Illustration 3	46
4.4.4. Illustration 4	48
4.4.5. Illustration 5	49
4.4.6. Illustration 6	50

Dans ce chapitre, nous référant aux différents outils rappelés dans les deux précédents, nous détaillons la méthode numérique que nous avons développée pour étudier la stabilité uniforme des systèmes non linéaires commutés. Au chapitre précédent nous avons mis en avant la première étape de ladite méthode en établissant la réalisation de l'opérateur de Koopman sur une base de monômes. Nous avons ainsi obtenu une matrice représentative de celui-ci sur cette même base. Les prochaines étapes seront développées ici. Après avoir utilisé le critère de résolubilité pour l'algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman, la méthode consiste à construire une fonction candidate de Lyapunov commune et à l'utiliser pour estimer un bassin d'attraction du système commuté. Quelques nuances entre la méthode développée ci-dessous et le résultat 2.4.10 seront aussi mises en évidence afin de les différencier.

4.1. Algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman

Soit un système commuté, constitué par m sous-systèmes, décrit par les équations

$$\dot{x} = F_i(x), \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (4.1)$$

En appliquant à chacun de sous-systèmes l'opérateur de Koopman, la relation 3.13 conduit au système commuté linéaire dans l'espace \mathcal{F}

$$\dot{\psi}(x) = \mathbf{L}_i^T \psi(x) \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (4.2)$$

Dans l'espace des observables \mathcal{F} , considéré au chapitre précédent, le système 4.2 est linéaire, ce qui motive le choix d'utiliser le résultat du théorème 2.4.8. Cela permet aussi de considérer, pour le système

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

4.2, une fonction de Lyapunov commune quadratique en ψ qui sera la fonction candidate de Lyapunov commune pour le système commuté 4.1.

Nous allons à présent montrer le lien important, que nous avons réussi à mettre en évidence, entre l'algèbre de Lie de champs de vitesse et celle de générateurs infinitésimaux de Koopman.

Proposition 4.1.1. *Soient les champs de vitesse $\dot{x} = F_1(x)$ et $\dot{x} = F_2(x)$. Soient les générateurs infinitésimaux de Koopman*

$$L_{U_1}f = F_1 \cdot \nabla f \quad \text{et} \quad L_{U_2}f = F_2 \cdot \nabla f \quad (4.3)$$

associés respectivement aux deux sous-systèmes ci-dessus et $f \in \mathcal{F}$ une observable. Alors nous avons

$$[L_{U_1}, L_{U_2}]f = L_{[F_1, F_2]}f.$$

Démonstration. Il est à noter que

$$\nabla (F_2 \cdot \nabla f) = J_{F_2}^T \cdot \nabla f + F_2 \cdot Hf \quad (4.4)$$

où J_{F_2} est la matrice Jacobienne de F_2 et H l'opérateur Hessien. Donc, d'après 4.3 et 4.4,

$$\begin{aligned} L_{U_1}(L_{U_2}f) &= F_1 \cdot \nabla (F_2 \cdot \nabla f) \\ &= F_1^T \cdot J_{F_2}^T \cdot \nabla f + F_1^T \cdot F_2 \cdot Hf \\ &= (J_{F_2} \cdot F_1)^T \cdot \nabla f + F_1^T \cdot F_2 \cdot Hf \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [L_{U_1}, L_{U_2}]f &= (L_{U_1}L_{U_2} - L_{U_2}L_{U_1})f \\ &= (J_{F_2}F_1 - J_{F_1}F_2)^T \cdot \nabla f + F_1^T \cdot F_2 \cdot Hf - F_2^T \cdot F_1 \cdot Hf \\ &= L_{[F_1, F_2]}f. \end{aligned}$$

□

La proposition 4.1.1 ci-dessus établit un isomorphisme entre l'algèbre de Lie de champs de vitesse et celle de générateurs infinitésimaux de Koopman. En effet, d'après ce qui précède, le crochet de Lie $[L_{U_1}, L_{U_2}]$ des générateurs infinitésimaux est égal à celui associé au système dont le champ de vitesse est le crochet de Lie $[F_1, F_2]$. Par conséquent, le corollaire suivant est obtenu

Corollaire 4.1.2. *Soient les systèmes $\dot{x} = F_1(x)$ et $\dot{x} = F_2(x)$. Alors*

$$[L_{U_1}, L_{U_2}] = 0 \Leftrightarrow [F_1, F_2] = 0. \quad (4.5)$$

Le premier crochet de la relation 4.5 peut être remplacé par celui des matrices associées obtenues après projection. Ce résultat suggère une voie intéressante pour étudier le problème posé par D. Liberzon. En effet, on pourrait s'intéresser aux structures de l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs de Koopman (ou alors leurs matrices représentatives) au lieu des champs de vitesse. Cependant, il faudrait tout de même démontrer rigoureusement que les propriétés de stabilité sont transférées d'une algèbre à l'autre. Nous illustrons ce qui précède par les deux exemples suivants.

Exemples

Exemple 1 : Soient les champs de vecteurs suivants

$$F_1(x) = \begin{cases} 0.1x_1 - 2x_2 \\ 0.1x_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_2(x) = \begin{cases} 0.2x_1 - 1.5x_2 \\ 0.2x_2 \end{cases}.$$

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

Nous avons $[F_1, F_2](x) = 0$ c'est-à-dire les deux champs de vecteurs commutent. Trouvons les matrices de Koopman associées aux deux champs. Si nous considérons pour degré total de monômes de la base $d = 1$, alors nous avons les matrices

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ -2 & 0.1 \end{pmatrix} \text{ et } L_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ -1.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

qui commutent. Si $d = 2$ nous avons

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0.2 \end{pmatrix} \text{ et } L_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.5 & 0.4 \end{pmatrix}$$

qui commutent également. Il en est de même pour $d = 3, 4, 5$. La relation n'est plus observée lorsque $d = 6$. Ceci s'expliquerait par le fait que les matrices de Koopman sont tronquées.

Exemple 2 : Soient les champs de vecteurs

$$F_1(x) = \begin{cases} -2x_1 + x_1x_2 \\ -2x_2 - x_1^2 \end{cases} \text{ et } F_2(x) = \begin{cases} -2x_1 + x_2^2 \\ -x_2 - x_1^2 \end{cases}$$

associés aux systèmes dynamiques 3.17 et 3.20 vus dans le chapitre précédent. Les deux champs de vecteurs ne commutent pas. En effet,

$$[F_1, F_2](x) = \begin{cases} -x_1^3 + 2x_1^2x_2 - x_1x_2 + x_2^3 + 2x_2^2 \\ 2x_1^2x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2^2 \end{cases}.$$

Comme vu dans précédemment, les matrices de Koopman associées aux deux champs de vecteurs sont données, pour $d = 2$, par

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Ces deux matrices ne commutent pas. En effet,

$$[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Pour $d = 3$, nous avons

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

et

$$\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Ces deux matrices ne commutent pas. En effet,

$$[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Considérons à présent l'algèbre de Lie

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{L}_i, i = 1, 2, \dots, m\}_{LA}$$

engendrée par les matrices de Koopman associées aux différents sous-systèmes. Comme vu dans le chapitre précédent, celles-ci sont de taille $n \times n$. Pour tester la résolubilité de \mathcal{G} , nous utilisons l'algorithme¹ ci-dessous tel que décrit dans [5](page 322).

- Etape 1 : Trouver la base de $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)}$.
 - a) Choisir l'ensemble des matrices linéairement indépendantes à partir de matrices $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_m$;
 - b) Calculer tous les crochets de Lie possibles entre les matrices obtenues en a) et ajouter à l'ensemble les nouveaux produits indépendants ;
 - c) Répéter b) au plus n^2 fois tout en mettant à jour l'ensemble des matrices pour obtenir la base de $\mathcal{G}^{(0)}$.
- Etape 2 : Pour $i \geq 1$, pour trouver la base de $\mathcal{G}^{(i)}$, calculer les crochets de Lie entre les matrices de la base de $\mathcal{G}^{(i-1)}$.
- Si la base de $\mathcal{G}^{(i)}$, pour un certain $i \leq n$, est nulle alors \mathcal{G} est résoluble. Si la base n'est pas nulle pour $i = n$ alors \mathcal{G} n'est pas résoluble.

Enfin, rappelons que la résolubilité de l'algèbre de Lie \mathcal{G} n'est qu'une condition suffisante mais pas nécessaire à la stabilité uniforme du système 4.1. A ce niveau, d'après le théorème 2.4.8, ce test nous conduirait, une fois qu'il y a résolubilité, à l'existence d'une fonction de Lyapunov commune. Cette dernière est une fonction quadratique en $\psi(x)$ pour le système commuté

$$\dot{\psi}(x) = \mathbf{L}_i^T \cdot \psi(x), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

1. Voir l'annexe A.1.3 pour l'implémentation de ce test.

Quelques exemples

Dans ce paragraphe, nous illustrons l'algorithme du test de résolubilité. Nous considérons d'abord quelques cas d'algèbre de Lie engendrée par des matrices quelconques, ensuite celle engendrée par des matrices de Koopman. Ces dernières sont obtenues en appliquant, tel que décrit dans le deuxième chapitre, l'opérateur de Koopman sur les champs de vitesse des sous-systèmes. Pour nous convaincre de la validité du résultat du test, nous utilisons pour les premiers cas le théorème de Lie énoncé comme suit dans [7] (page 2977)

Théorème 4.1.3. (Lie) *L'ensemble des matrices $\{A_i, i = 1, \dots, m\}$ admet une triangulation simultanée si et seulement l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = \{A_i, i = 1, \dots, m\}_{LA}$ est résoluble.*

Exemple 1 : Soient données les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & -2 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & -1.5 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont triangulaires supérieures. L'algèbre de Lie qu'elles engendrent est donc résoluble. Plus encore, elles commutent ($[A_1, A_2] = 0$). Le test de résolubilité est conforme à ce résultat. Nous avons

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} = \text{Span} \{A_1, A_2\}$$

et

$$\mathcal{G}^{(1)} = 0.$$

Exemple 2 : Soient les matrices réelles

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La première matrice est non triangularisable². Donc l'algèbre de Lie que ces matrices engendrent est non résoluble. Le test de résolubilité donne le résultat suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} &= \text{Span} \left\{ A_1, A_2, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathcal{G}^{(1)} &= \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 51 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{G}^{(2)} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 104 \\ -104 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -52 & 520 \\ 0 & 52 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -520 & -104 \\ -104 & 520 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ce qui montre la non résolubilité de \mathcal{G} .

Exemple 3 : Soient les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1.16 & -0.04 & 0.14 \\ 3.9 & -2.6 & 2.1 \\ 0.36 & -0.84 & 0.94 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4.02 & 0.88 & -0.58 \\ -5.145 & 1.88 & -2.705 \\ -2.59 & 0.96 & -5.11 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3.68 & 1.08 & 0.22 \\ 37/60 & 28/15 & -0.45 \\ 167/150 & -149/75 & 4.12 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Dans [7] (page 2980), il est montré que ces matrices admettent une triangulation simultanée. Elles engendrent donc une algèbre de Lie résoluble. Ceci est confirmé aussi par le test de résolubilité.

2. En effet, son polynôme caractéristique, $\lambda^2 - 2\lambda + 2$, est irréductible dans \mathbb{R} .

Exemple 4 : Soient les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Dans [10] (page 555), il est montré que ces matrices ne sont pas simultanément triangularisables c'est-à-dire que l'algèbre de Lie qu'elles engendrent n'est pas résoluble. Le test de résolubilité donne le même résultat.

Exemples 6 : Revenons aux six exemples de systèmes commutés non linéaires 2.9-2.14. Pour ces derniers, le tableau 4.1 résume les résultats du test.

TABLE 4.1. – Test de résolubilité

Système	Degré total (d)	Résultat
(systc1)	3	Non résoluble
	3	Non résoluble
	7	Non résoluble
(systc2)	2	Non résoluble
	3	Non résoluble
	5	Non résoluble
(systc3)	3	Résoluble
	4	Résoluble
	5	Résoluble
	7	Résoluble
	10	Résoluble
(systc4)	4	Résoluble
	5	Résoluble
	7	Résoluble
(systc5)	3	Non résoluble
	5	Non résoluble
	7	Non résoluble
(systc6)	3	Non résoluble
	5	Non résoluble
	7	Non résoluble
	12	Non résoluble

Nous remarquons dans le tableau 4.1 que la résolubilité semble être inchangée quand la base de monômes est augmentée. Il aurait été intéressant de confronter ces résultats avec un test de résolubilité basé directement sur les champs de vitesse. Mais notre méthode ne portant que sur des matrices, nous ne le ferons pas dans ce travail.

Terminons cette section par une remarque au sujet du théorème 2.4.10. Vu la non bornitude de l'entier r , ce théorème semble être pratiquement difficile utilisable. Pour cette raison, nous proposons ici un test, non exhaustif, qui permettrait de s'assurer que ce résultat ne peut pas être d'application pour certains exemples.

- Calculer les termes

$$C_r^{l,i}(x) = (adF_l)^r(F_i)(x) \quad \forall i, l = 0, \dots, m, i \neq l \quad \text{pour } r = 0, 1, 2, \dots, r_f$$

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

où r_f est un entier quelconque fixé. Si $C_{r_f}(x) \neq 0$ alors soit $C_{r'}(x) = 0$ pour un $r' > r_f$, soit un tel r' n'existe pas. Dans ce dernier cas, la première condition 2.18 n'est pas vérifiée et dans le premier nous passons à la deuxième condition 2.19

- Calculer les termes

$$CC_s^{k,l,i}(x) = [F_k - F_l, (adF_l)^s (F_i - F_l)] \quad \forall k, i, l = 0, \dots, m \quad i, k \neq l \quad \text{pour } s = 0, 1, 2, \dots, r_f.$$

Si $CC_s(x) \neq 0$, pour au moins un $s \leq r_f$, alors la deuxième condition n'est pas vérifiée. Sinon il y a lieu de prendre un r_f plus grand.

Pour le cas de deux sous-systèmes, nous avons les termes

$$C_r^{0,1}(x) = (adF_0)^r (F_1)(x) \quad \text{et} \quad C_r^{1,0}(x) = (adF_1)^r (F_0)(x)$$

et

$$CC_s^{1,0,0}(x) = [F_1 - F_0, (adF_0)^s (F_1 - F_0)](x) \quad \text{et} \quad CC_s^{0,1,1}(x) = [F_0 - F_1, (adF_1)^s (F_0 - F_1)](x).$$

Nous pouvons à présent appliquer le test ci-dessus³ pour les systèmes commutés non linéaires 2.9-2.14. L'objectif est de nous convaincre de la nécessité d'utiliser notre méthode, les résultats de D. Liberzon n'étant pas concluants.

- Pour le système 2.9, nous avons

$$C_1 = \begin{cases} x^4 + 3x^3 + 3x^2y^3 + 12x^2y - 2xy^3 + 12xy^2 - 10xy + 14x - 5y^3 - 9y \\ 3x^5 - 3x^4 + 3x^2y - 6x^2 - 8x - 8y^3 - 14y \end{cases} \quad \text{et} \quad CC_1 \neq 0.$$

- Pour le système 2.10, nous avons $C_1 \neq 0$ et $CC_1 \neq 0$.
- Pour le système 2.11, nous avons

$$C_1 = \begin{cases} 2x^2y^2 - xy + y^4 + 4y^3 \\ -2x^3y + x^2 - xy^3 - 4xy^2 \end{cases}$$

et

$$CC_1 = \begin{cases} -2x^4y - 2x^3y^3 - x^2y^3 - 12x^2y^2 - 3xy^5 + xy - 5y^5 - 6y^4 - 8y^3 \\ 2x^5y + 2x^4y^2 + x^3y^2 + 12x^3y + 3x^2y^4 - x^2 + xy^4 + 6xy^3 + 8xy^2 \end{cases}.$$

- Pour le système 2.12, nous avons

$$C_1 = \begin{cases} -2x^2y^3 + 6x^2y^2 - 2xy^2 - 2xy - 4y^4 + 2y^3 - y^2 \\ -x^3 + x^2 + 4xy^4 - 4xy^3 - 2xy - x + y^3 + y^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad CC_1 \neq 0.$$

- Pour le système 2.13, nous avons

$$C_1 = \begin{cases} 4x^2y - 6xy^2 + 2y^3 - 4y \\ -x^3 + 4x^2y - 5xy^2 + 2x \end{cases}$$

et

$$CC_1 = \begin{cases} -2x^4y + 4x^3y^2 + 6x^3 - 8x^2y^3 - 24x^2y + 32xy^2 - 8x - 2y^5 - 6y^3 - 4y \\ -x^5 + 10x^3y^2 + 9x^3 - 4x^2y^3 - 28x^2y - xy^4 + 21xy^2 - 2x - 12y^3 + 8y \end{cases}.$$

3. Vu la lourdeur dans les écritures de termes, nous présentons quelques termes simples et proposons les résultats pour les autres.

- Pour le système 2.14, nous avons

$$C_1 = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 - x^2y + x + 2y \\ \frac{1}{3}x^5 - \frac{7}{3}x^3 + x^2y + 2xy^2 + 3x - y \end{cases}$$

et

$$CC_1 = \begin{cases} x^5 - x^4y - \frac{25}{3}x^3 + 6x^2y + 8xy^2 + 12x - 4y \\ -\frac{1}{3}x^7 + \frac{5}{3}x^5 - 5x^4y + 4x^3y^2 + \frac{7}{3}x^3 + 29x^2y - 8xy^2 - 6x - 4y^3 - 12y \end{cases}.$$

Nous remarquons que pour aucun des six exemples choisis, les critères du théorème 2.4.10 ne sont remplis. Ce dernier ne peut être d'application. D'où l'intérêt de faire appel à une autre méthode. Signalons toutefois que le test ci-dessus ne tient pas compte de l'hypothèse de stabilité asymptotique globale des sous-systèmes individuels. A défaut de cette hypothèse, il ne serait même pas utile de tester les critères du théorème 2.4.10.

4.2. Nuances avec le résultat de D. Liberzon

A travers quelques exemples et calculs nous suggérons maintenant quelques nuances entre la méthode développée dans ce travail et le théorème 2.4.10 de D. Liberzon, cela dans le but de les distinguer. Prenons comme premier exemple le système commuté défini par les deux sous-systèmes suivants

$$(syst1) \equiv \begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases} \quad et \quad (syst2) \equiv \begin{cases} \dot{x} = 3y \\ \dot{y} = -x - 4y \end{cases}. \quad (4.13)$$

Pour le système 4.13, nous calculons les crochets suivants

$$(adF_1)^0 F_2 = F_2 = \begin{cases} 3y \\ -x - 4y \end{cases};$$

$$(adF_1)^1 F_2 = [F_1, F_2] = \begin{cases} -2x - 2y \\ 2x + 2y \end{cases}$$

et

$$(adF_1)^2 F_2 = [F_1, [F_1, F_2]] = 0.$$

Mais aussi

$$(adF_2)^0 F_1 = F_1 = \begin{cases} -x + y \\ -x - 3y \end{cases};$$

$$(adF_2)^1 F_1 = [F_2, F_1] = \begin{cases} 2x + 2y \\ -2x - 2y \end{cases}; \quad (4.14)$$

$$(adF_2)^2 F_1 = [F_2, [F_2, F_1]] = \begin{cases} 4x + 4y \\ -4x - 4y \end{cases}; \quad (4.15)$$

$$(adF_2)^3 F_1 = [F_2, [F_2, [F_2, F_1]]] = \begin{cases} 8x + 8y \\ -8x - 8y \end{cases}; \dots \quad (4.16)$$

Les expressions 4.14, 4.15 et 4.16 montrent que le théorème 2.4.10 ne permet pas de conclure sur la stabilité du système commuté 4.13. En effet, dans ce cas, un entier positif r tel que $(adF_2)^r F_1 = 0$ ne peut être trouvé et donc la condition 2.18 ne peut être satisfaite. Or, nous avons vu à la section 2.15, page 16, que le système commuté 2.15 (qui est le même que 4.13) était stable sous la loi de commutation

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

qui a été bien définie. De plus, ce système étant linéaire, nous pouvons nous intéresser, comme cela est fait dans [3] (page 55), à la structure de l'algèbre de Lie engendrée par les deux matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}; \\ \mathcal{G}^{(1)} &= [\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{G}^{(0)}] = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{G}^{(2)} = [\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci prouve que \mathcal{G} est une algèbre de Lie résoluble. De plus, d'après le théorème 2.4.8, le système commuté 4.13 est globalement uniformément exponentiellement stable. Cependant,

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = \mathcal{G}^0 &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}; \\ \mathcal{G}^1 &= [\mathcal{G}^0, \mathcal{G}^0] = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{G}^2 = [\mathcal{G}^0, \mathcal{G}^1] = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ce qui montre que l'algèbre de Lie \mathcal{G} n'est pas nilpotente. C'est principalement pour cette raison que le résultat 2.4.10 ne permet pas de conclure.

Nous montrons ensuite que le corollaire 2.4.11 du résultat 2.4.10 de D. Liberzon est équivalent à la résolubilité de l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs de Koopman associés aux sous-systèmes.

Proposition 4.2.1. *Supposons que le corollaire 2.4.11 est vérifié pour un système commuté donné. Alors, l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs de Koopman associées aux sous-systèmes est résoluble.*

Démonstration. D'après la relation 4.5, équivalence entre commutation de champs de vitesse et celle d'opérateurs de Koopman, nous pouvons écrire

$$[L_{U_0}, [L_{U_0}, L_{U_1}]] = [L_{U_1}, [L_{U_0}, L_{U_1}]] = 0. \quad (4.17)$$

Soit

$$\mathcal{G} = \{L_{U_0}, L_{U_1}\}_{LA},$$

l'algèbre de Lie engendrée par les deux opérateurs de Koopman. Nous avons, d'après 4.17,

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} &= \text{Span} \{L_{U_0}; L_{U_1}; [L_{U_0}, L_{U_1}]; [L_{U_0}, [L_{U_0}, L_{U_1}]] = 0; [L_{U_1}, [L_{U_0}, L_{U_1}]] = 0\} \\ &= \text{Span} \{L_{U_0}; L_{U_1}; [L_{U_0}, L_{U_1}]\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(1)} &= \text{Span} \{[L_{U_0}, L_{U_1}]; [L_{U_0}, [L_{U_0}, L_{U_1}]] = 0; [L_{U_1}, [L_{U_0}, L_{U_1}]] = 0\} \\ &= \text{Span} \{[L_{U_0}, L_{U_1}]\} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{G}^{(2)} = 0.$$

Donc l'algèbre de Lie \mathcal{G} est résoluble. □

Le raisonnement ci-dessus ne peut être généralisé au cas où nous avons n'importe quel nombre des champs de vitesse c'est-à-dire plus de deux sous-systèmes. En effet, la base de l'algèbre de Lie \mathcal{G} ne serait pas constituée que d'éléments obtenus sous la forme $(adL_{U_l})^r (L_{U_i})$, avec r, l et i des entiers positifs. De plus, la première condition 2.18 du théorème 2.4.10 ne porte que sur les $m + 1$ champs de vitesse constituant le système commuté alors qu'ils ne forment pas forcément une base de l'algèbre de Lie. Par contre, si les $m + 1$ champs de vitesse de départ constituent déjà une base de l'algèbre de Lie \mathcal{G} qu'ils engendrent, alors la condition 2.18 permettrait de conclure sur la résolubilité (nilpotence) de \mathcal{G} .

Proposition 4.2.2. *Supposons que $m + 1$ champs de vitesse constituent une base de l'algèbre de Lie \mathcal{G} qu'ils engendrent et vérifient la condition 2.18 du théorème 2.4.10. Alors l'algèbre de Lie \mathcal{G} est nilpotente.*

Démonstration. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^1 &= Span \left\{ (adL_{U_l})^0 (L_{U_i}) \right\} \quad \forall i, l = 0, \dots, m \quad \text{et} \quad i \neq l, \\ \mathcal{G}^2 &= Span \left\{ (adL_{U_l})^1 (L_{U_i}) \right\} \quad \forall i, l = 0, \dots, m \quad \text{et} \quad i \neq l, \\ \mathcal{G}^3 &= Span \left\{ (adL_{U_l})^2 (L_{U_i}) \right\} \quad \forall i, l = 0, \dots, m \quad \text{et} \quad i \neq l, \\ &\vdots \\ \mathcal{G}^{r+1} &= Span \left\{ (adL_{U_l})^r (L_{U_i}) \right\} \quad \forall i, l = 0, \dots, m \quad \text{et} \quad i \neq l \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'où l'algèbre de Lie \mathcal{G} est nilpotente, donc résoluble. \square

D'après ce qui précède le résultat de D. Liberzon semble s'apparenter à la propriété de nilpotence des matrices de Koopman, ce qui représente une condition plus restrictive que celle de résolubilité que nous proposons sur ces matrices.

4.3. Construction d'une fonction candidate de Lyapunov commune

Dans ce qui suit, nous considérons le cas où le système commuté est composé de deux sous-systèmes et s'écrit sous la forme

$$\dot{x} = F_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Dans l'espace des observables, soit la forme quadratique

$$V(x) = \psi^T(x) Q \psi(x), \quad \text{avec } Q \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ (} n \times n \text{ dimension des } \mathbf{L}_i \text{).} \quad (4.18)$$

Si Q est une matrice définie positive ($Q > 0^4$) alors nous avons $V(x) > 0$, pour tout $x \neq 0$. La dérivée de la fonction V est donnée par

$$\dot{V}(x) = \dot{\psi}^T(x) Q \psi(x) + \psi(x) Q \dot{\psi}^T(x). \quad (4.19)$$

Aussi, la dérivée le long du flot donne

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x).F(x) = L_U V(x). \quad (4.20)$$

Nous avons montré dans le chapitre précédent que la dérivée temporelle de ψ est donnée par

$$\dot{\psi} = \mathbf{L}^T \psi \quad (4.21)$$

4. Ceci est une notation.

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

où \mathbf{L} est la matrice représentative de l'opérateur de Koopman L_U dans la base 3.15. Dans ce cas, la relation 4.19 s'écrit

$$\dot{V}(x) = \psi(x)^T \mathbf{L} Q \psi(x) + \psi(x)^T Q \mathbf{L}^T \psi(x).$$

Voyons à présent les conditions à imposer pour que \dot{V} soit négative. Nous avons

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) < 0 &\Leftrightarrow \psi(x)^T \mathbf{L} Q \psi(x) + \psi(x)^T Q \mathbf{L}^T \psi(x) < 0 \\ &\Leftrightarrow \psi(x)^T (\mathbf{L} Q + Q \mathbf{L}^T) \psi(x) < 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{L} Q + Q \mathbf{L}^T < 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.4.8 (et 2.4.7), nous déduisons que si \mathbf{L}_1 et \mathbf{L}_2 engendrent une algèbre de Lie résoluble, alors il existe $Q > 0$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 Q + Q \mathbf{L}_1^T < 0 \\ \mathbf{L}_2 Q + Q \mathbf{L}_2^T < 0 \end{cases}$$

et $V(x)$ est une fonction quadratique de Lyapunov commune correspondant au système commuté

$$\dot{\psi}(x) = \mathbf{L}_i^T \psi(x). \quad (4.22)$$

En somme, pour construire $V(x)$, il suffit de résoudre les LMIs

$$\begin{cases} Q > 0 \\ \mathbf{L}_1 Q + Q \mathbf{L}_1^T < 0 \\ \mathbf{L}_2 Q + Q \mathbf{L}_2^T < 0 \end{cases}$$

pour obtenir Q et donc aussi $V(x) = \psi(x)^T Q \psi(x)$ qui est la fonction candidate de Lyapunov commune. Cette dernière est plus générale que la fonction quadratique de Lyapunov commune.

Etant donné que dans notre méthode l'opérateur de Koopman est approximé par sa projection dans une dimension finie, la fonction de Lyapunov 4.18 n'est peut-être pas valable partout. En effet, la relation 4.21 est une approximation. D'où la nécessité de tester $V(x)$ en évaluant $\dot{V}(x)$.

Estimation du bassin d'attraction

La fonction candidate de Lyapunov 4.18 obtenue ci-dessus permet de construire le bassin d'attraction pour le système commuté. Pour ce faire, nous nous servons de la méthode⁵ utilisée dans [20] (page 9).

- (i) Considérer la fonction candidate de Lyapunov commune 4.18;
- (ii) Considérer la région où cette fonction décroît le long des trajectoires des deux sous-systèmes à la fois

$$\dot{V}(x) = F_1(x) \cdot \nabla V(x) < 0 \quad \text{et} \quad \dot{V}(x) = F_2(x) \cdot \nabla V(x) < 0;$$

- (iii) Le plus grand ensemble de niveau fermé de la fonction V inclus dans cette région définit le bassin d'attraction du système commuté.

4.4. Illustrations et discussions

Dans cette section, nous illustrons la seconde partie de la méthode développée au travers des exemples déjà évoqués. Nous discuterons chaque fois de la différence observée lorsqu'il est question des matrices de Koopman tronquées et projetées. Un autre axe de discussion reposera sur la base de monômes choisie

5. Voir le code à l'annexe A.1.4 pour la construction de $V(x)$ et l'estimation du bassin d'attraction.

soit le degré total d fixé. Rappelons que nous avons déjà montré que le théorème 2.4.10 ne permet pas de conclure sur la stabilité pour ces six exemples. Nous proposons ici les bassins d'attraction correspondant à ces différents systèmes commutés.

4.4.1. Illustration 1

Soit le système commuté non linéaire 2.9 défini à la page 15. D'après le tableau 4.1, l'algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman associées à ces deux sous-systèmes est non résoluble. Nous ne pouvons donc pas directement conclure sur l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune du système commuté linéaire (dans l'espace des observables)

$$\dot{\psi}(x) = \mathbf{L}_i^T \psi, \quad i = 1, 2.$$

La méthode développée dans ce travail permet cependant d'estimer le bassin d'attraction de ce système sur la figure 4.1.

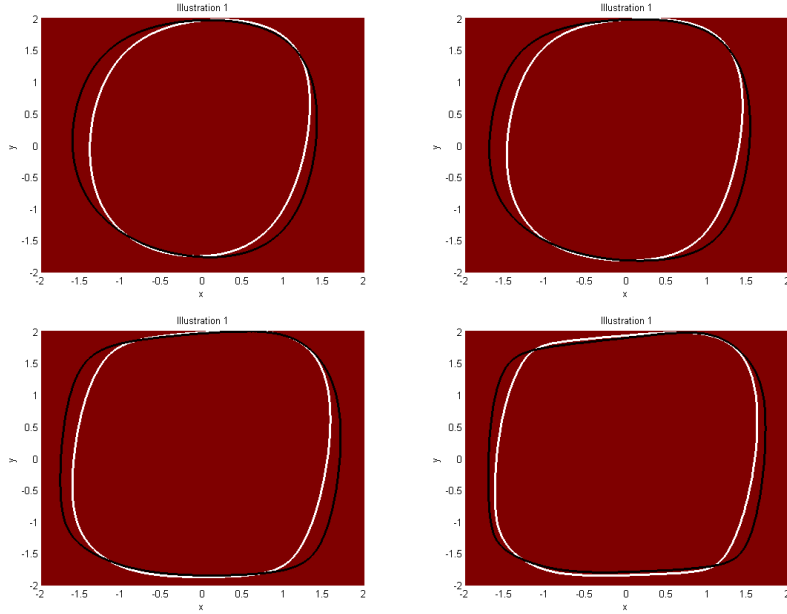


FIGURE 4.1. – Bassin d'attraction pour des matrices tronquées en blanc et projetées en noir pour $d = 3$, $d = 4$, $d = 7$ et $d = 10$. La couleur rouge désigne la région où $\dot{V}(x) \leq 0$.

Soulignons encore une fois le fait que la résolubilité n'est qu'une condition suffisante pour l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune. Comme nous l'observons à travers cette illustration, cette dernière peut être trouvée même quand les matrices de Koopman n'engendrent pas une algèbre de Lie résoluble.

Nous remarquons, sur la figure 4.1, que $\dot{V}(x) \leq 0$ sur toute la région choisie. Ne sachant pas ce qui se passe dans les zones non représentées, à moins d'agrandir la région, nous ne pouvons pas conclure que le système est globalement stable. Pour les différents cas considérés, la plus grande courbe de niveau possible, contenue dans cette région est donnée dans la table 4.2.

Nous remarquons que dans le cas des matrices projetées le bassin d'attraction est plus important que celui de matrices tronquées, ceci motive l'utilisation de la projection. Aussi, le niveau de la fonction $V(x)$ diminue avec la projection mais augmente avec le degré total d . Nous représentons, à la figure 4.2, la trajectoire de ce système pour quelques conditions initiales.

Nous observons, sur la figure 4.2, que partant de ces trois points, le système commuté est stable. Aussi, le point $(0.5, 0.5)$, se trouve dans les bassins d'attraction à la figure 4.1 mais $(100, 100)$ est bien éloigné

TABLE 4.2. – Niveau de $V(x)$.

d	Troncature	Projection
3	4.55	4
4	15	11
7	1550	470
10	3.10^5	3.10^5

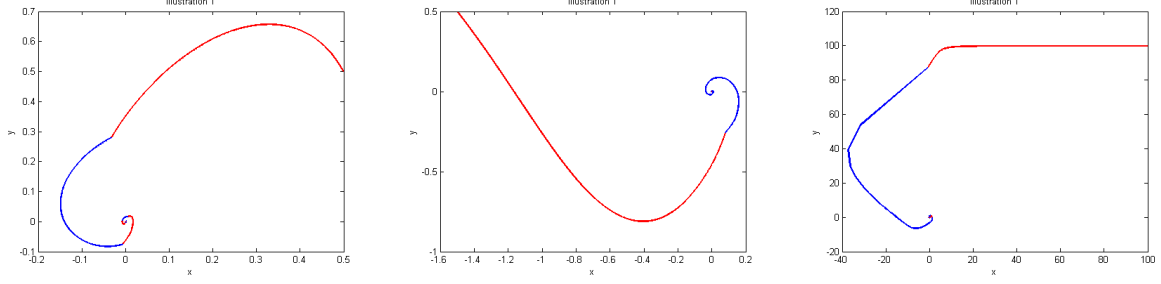


FIGURE 4.2. – Trajectoire du système commuté 2.9 pour $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$, $(-1.5, 0.5)$ et $(100, 100)$. La trajectoire du premier sous-système est représenté en bleu et celle du second en rouge.

de cette région. Il semblerait que le système 2.9 soit globalement stable. Soulignons que ces simulations ne constituent en rien une preuve de la stabilité uniforme (ni même de la GUAS). En effet, nous avons considéré ici une loi de commutation bien définie et n'avons pris en compte que quelques conditions initiales. La loi de commutation s'obtient en effectuant 20 commutations qui alternent les deux sous-systèmes. Le temps d'intégration d'un sous-système actif est défini en générant un nombre aléatoire selon une distribution exponentielle de moyenne 1.

4.4.2. Illustration 2

Soit le système commuté non linéaire 2.10 défini à la page 15. L'algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman associées à ces deux sous-systèmes est non résoluble. Le bassin d'attraction estimé correspondant à ce système est représenté sur la figure 4.3.

Nous constatons sur la figure 4.3 comme pour la première illustration, que $\dot{V}(x) \leq 0$ sur toute la région choisie. La plus grande courbe de niveau possible, contenue dans cette région est donnée dans la table 4.3. Nous remarquons dans les deux cas, le bassin d'attraction est le même et ce pour toutes les valeurs

TABLE 4.3. – Niveau de $V(x)$.

d	Troncature	Projection
2	7.5	7.5
3	16.5	16.5
5	100	100

de d choisies. Aussi, il semble que plus le degré total d est grand plus le bassin d'attraction est important. La figure 4.4 représente la trajectoire de ce système pour quelques conditions initiales.

D'après la figure 4.4, le système commuté est stable en considérant les trois points comme conditions initiales.

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

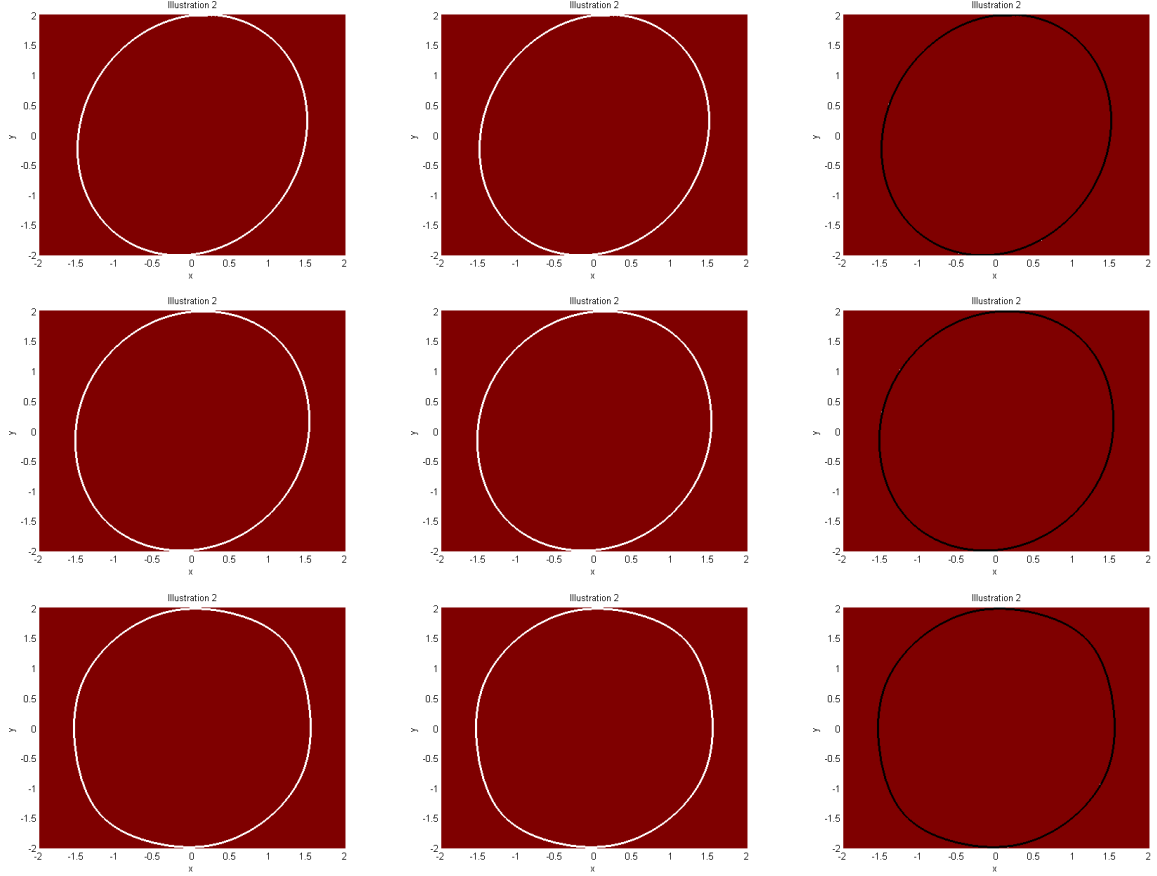


FIGURE 4.3. – Bassin d'attraction pour des matrices tronquées ($d = 2$, $d = 3$ et $d = 5$ en colonne à gauche), projetées ($d = 2$, $d = 3$ et $d = 5$ en colonne au milieu) et leur comparaison deux à deux (en colonne à droite).

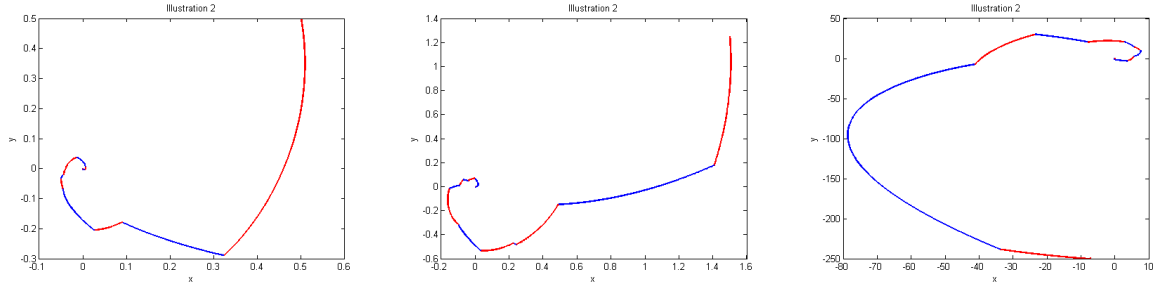


FIGURE 4.4. – Trajectoire du système commuté 2.10 pour $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$, $(1.5, 1.25)$ et $(-7, -250)$.

4.4.3. Illustration 3

Soit le système commuté non linéaire 2.11 défini à la page 15. Dans le tableau 4.1, l'algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman associées à ces deux sous-systèmes est résoluble. D'après le théorème 2.4.8, il existe alors une fonction de Lyapunov quadratique commune du système commuté linéaire (dans l'espace des observables)

$$\dot{\psi}(x) = \mathbf{L}_i^T \psi, \quad i = 1, 2.$$

L'estimation du bassin d'attraction de ce système est donnée à la figure 4.5.

Sur la figure 4.5 deux types de zones apparaissent : la bleue où $\dot{V}(x) > 0$ et la rouge où $\dot{V}(x) \leq 0$.

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

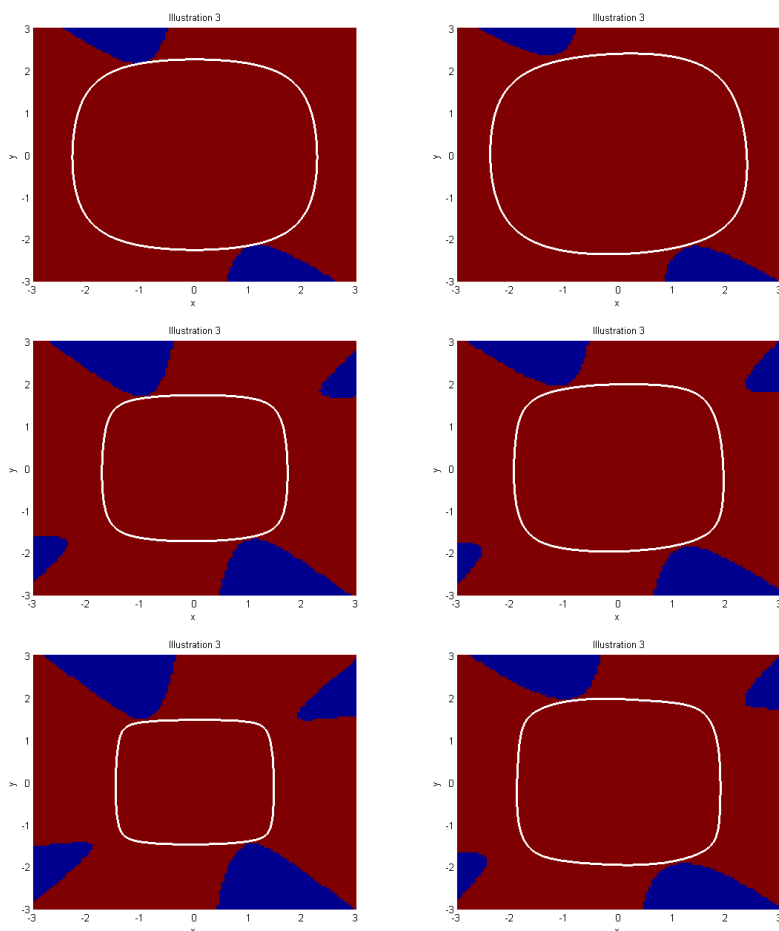


FIGURE 4.5. – Bassin d’attraction pour des matrices tronquées ($d = 3$, $d = 6$ et $d = 10$ en colonne à gauche) et projetées ($d = 3$, $d = 6$ et $d = 10$ en colonne à droite). La couleur bleue représente la région où $\dot{V}(x) > 0$.

Cela pourrait nous amener à croire que le système n’est pas globalement stable. Mais encore faut-il s’en méfier car les zones bleues ne représentent pas forcément les points depuis lesquels le système n’est pas uniformément stable. Nous observons aussi que, pour le cas des matrices tronquées, plus nous augmentons la valeur de d moins le bassin d’attraction est important. Signalons que cette observation est contre intuitive étant donné qu’on s’attendait, comme dans la référence [20], avoir un bassin d’attraction plus important en augmentant la valeur de d . Enfin, le cas des matrices projetées définit un plus grand bassin d’attraction. La plus grande courbe de niveau contenue dans cette région est donnée dans la table 4.4. Le niveau de la fonction $V(x)$ augmente avec la projection et avec la valeur de d . Nous représentons, à la

TABLE 4.4. – Niveau de $V(x)$.

d	Troncature	Projection
3	30	37
6	90	300
10	200	25.10^3

figure 4.6, la trajectoire de ce système pour quelques conditions initiales.

Sur la figure 4.6, partant de ces quatre points choisis le système est stable, pourtant, le point $(-2, 3)$ se trouve dans la zone blue sur la figure 4.5.

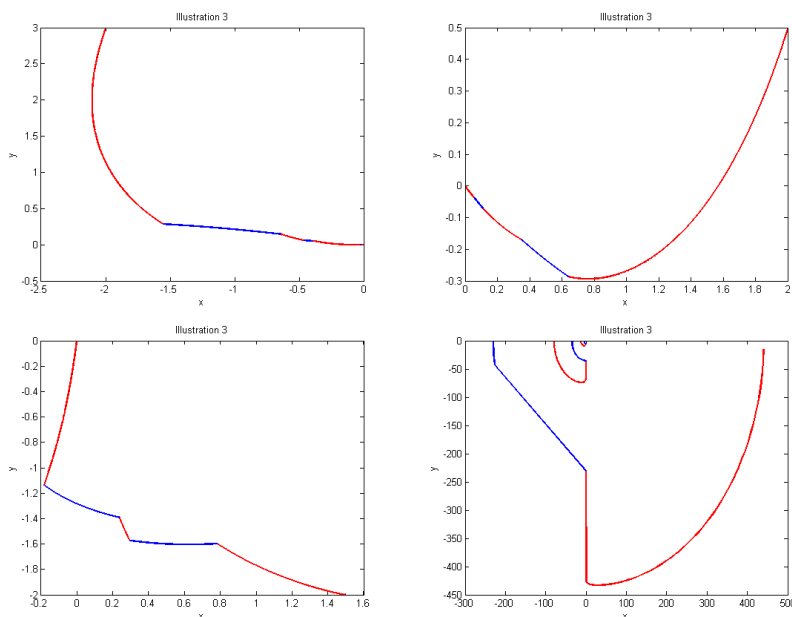


FIGURE 4.6. – Trajectoire du système commuté 2.11 pour $(x_0, y_0) = (-2, 3)$, $(2, 0.5)$, $(1.5, -2)$ et $(440, -15)$.

4.4.4. Illustration 4

Soit le système commuté non linéaire 2.12 défini à la page 15. Selon les résultats du tableau 4.1, l'algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman associées à ces deux sous-systèmes est résoluble. Comme dans le cas précédent, il existe d'une fonction de Lyapunov quadratique commune du système commuté linéaire (dans l'espace des observables). L'estimation du bassin d'attraction de ce système est donnée à la figure 4.7.

Sur la figure 4.7, nous remarquons que pour les différentes valeurs de d choisies, le cas des matrices projetées définit un bassin d'attraction plus important que celui de matrices tronquées. Contrairement au premier cas, dans ce dernier, plus le degré augmente moins le bassin d'attraction est important. Cette observation est encore une fois contre-intuitive. Aussi, nous observons la grande différence entre les bassins d'attraction trouvés dans les deux cas. La plus grande courbe de niveau contenue dans cette région est donnée dans la table 4.5.

TABLE 4.5. – Niveau de $V(x)$.

d	Troncature	Projection
4	3.3	5
5	5	9
10	900	1705

Le niveau de la fonction $V(x)$ augmente avec le degré d et la projection. Nous représentons, à la figure 4.8, la trajectoire de ce système pour quelques conditions initiales.

Nous constatons sur la figure 4.8 que les points $(1.5, -1.5)$ et $(-1, -1.5)$ se situant dans la zone bleue à la figure 4.7, admettent deux comportements différents. Sur le quatrième et le septième graphe, le système, partant de ces points est instable alors que sur le cinquième et le huitième c'est le contraire. Il n'y a donc pas stabilité uniforme. Ce changement de comportement est dû au changement de la loi de commutation⁶. Aussi, partant du point $(-1.25, 0.5)$, se trouvant dans les bassins d'attraction à la

6. Avec le temps de commutation qui est aléatoire.

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

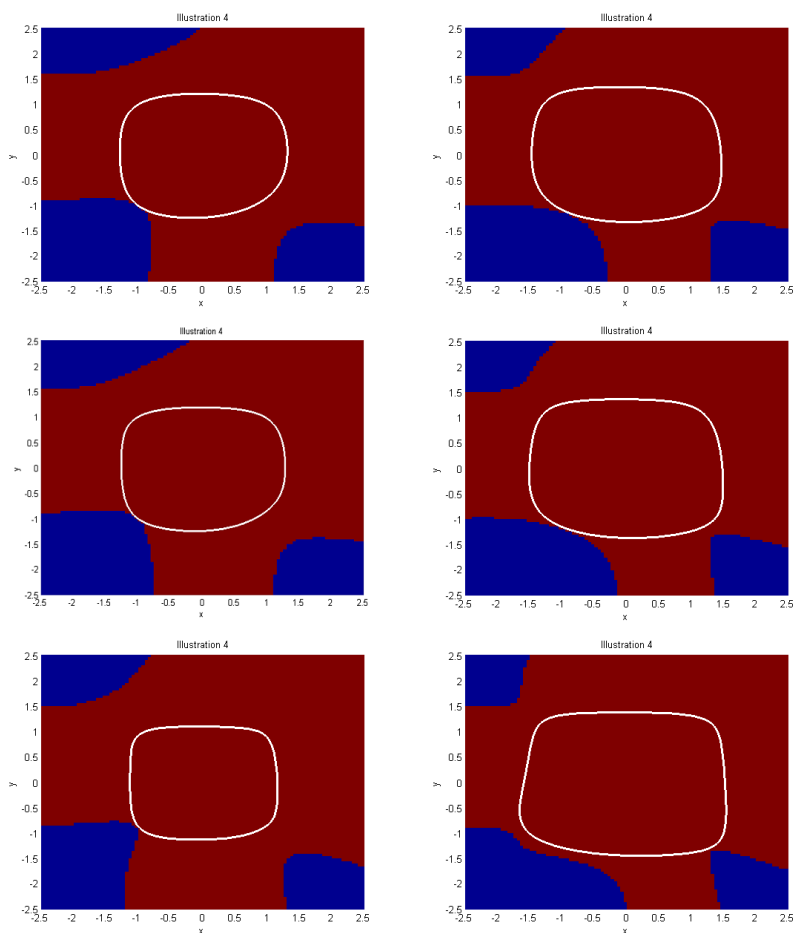


FIGURE 4.7. – Bassin d’attraction pour des matrices tronquées ($d = 4$, $d = 5$ et $d = 10$ en colonne à gauche) et projetées ($d = 4$, $d = 5$ et $d = 10$ en colonne à droite).

figure 4.7, le système est stable alors que nous observons une instabilité pour la condition $(2, -2)$ qui est relativement proche du bassin d’attraction. Notre estimation semble être relativement bonne.

4.4.5. Illustration 5

Soit le système commuté non linéaire 2.13 défini à la page 15. L’algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman associées à ces deux sous-systèmes est non résoluble, selon le tableau 4.1. Le bassin d’attraction estimé correspondant à ce système est donné à la figure 4.9.

Sur la figure 4.9 nous remarquons que les deux cas semblent conduire au même bassin d’attraction . Plus le degré d augmente moins ce dernier est important. La plus grande courbe de niveau contenue dans cette région est donnée dans la table 4.6.

TABLE 4.6. – Niveau de $V(x)$.

d	Troncature	Projection
3	1200	950
4	5200	4200
5	$2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$

Le niveau de la fonction $V(x)$ augmente avec le degré mais semble diminuer avec la projection. La figure 4.10 représente la trajectoire de ce système pour quelques conditions initiales.

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

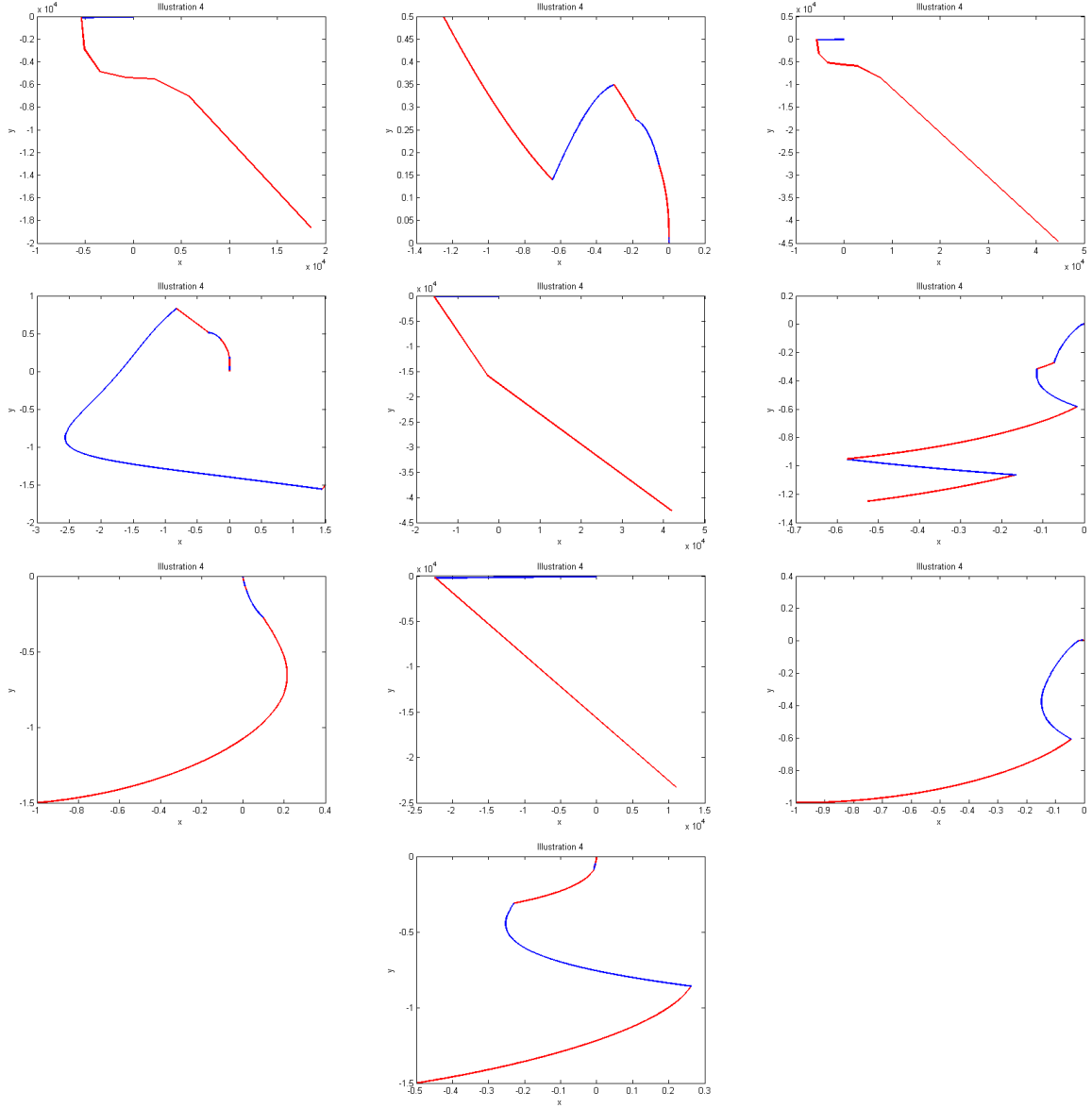


FIGURE 4.8. – Trajectoire du système commuté 2.12 pour $(x_0, y_0) = (2, -2), (-1.25, 0.5), (-20, 12), (1.5, -1.5), (1.5, -1.5), (-0.525, -1.25), (-1, -1.5), (-1, -1.5), (-1, -1),$ et $(-0.5, -1.5)$.

Nous observons sur la figure 4.10 que le système est stable pour les trois points définis comme conditions initiales.

4.4.6. Illustration 6

Soit le système commuté non linéaire 2.14 défini à la page 15. Selon les résultats du tableau 4.1, l'algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman associées à ces deux sous-systèmes est non résoluble. Cette non résolubilité semble être cohérente avec le fait que nous ne pouvons pas trouver une fonction de Lyapunov commune. Essayant d'estimer le bassin d'attraction de ce système nous avons le résultat à la figure 4.11.

Sur la figure 4.11, nous constatons que nous avons du mal à trouver une bonne région où $\dot{V}(x) \leq 0$. Dans ce cas nous supposons soit que ce système est stable et une fonction quadratique n'est pas suffisante pour l'étudier soit tout simplement qu'il n'est pas uniformément stable. La norme de la matrice Q trouvée après la résolution des *LMIs* est donnée dans la table 4.7.

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

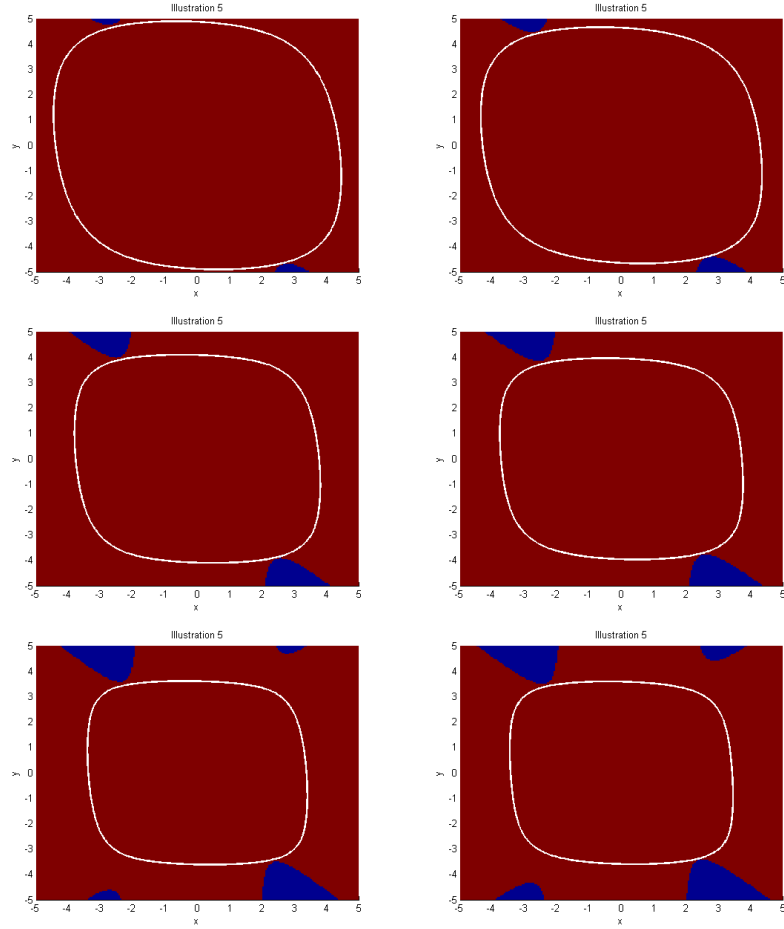


FIGURE 4.9. – Bassin d'attraction pour des matrices tronquées ($d = 3$, $d = 4$ et $d = 5$ en colonne à gauche) et projetées ($d = 3$, $d = 4$ et $d = 5$ en colonne à droite).

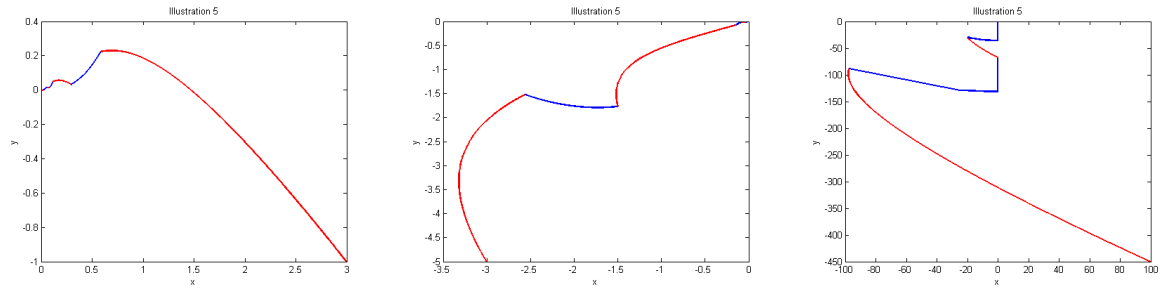


FIGURE 4.10. – Trajectoire du système commuté 2.13 pour $(x_0, y_0) = (3, -1)$, $(-3, -5)$ et $(100, -450)$.

TABLE 4.7. – Norme de Q .

d	Troncature	Projection
3	4.4363×10^{-13}	7.5766×10^{-13}
4	1.0589×10^{-12}	6.3278×10^{-12}
5	4.0142×10^{-12}	3.6765×10^{-12}
10	3.1363×10^{-9}	1.0614×10^{-8}

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

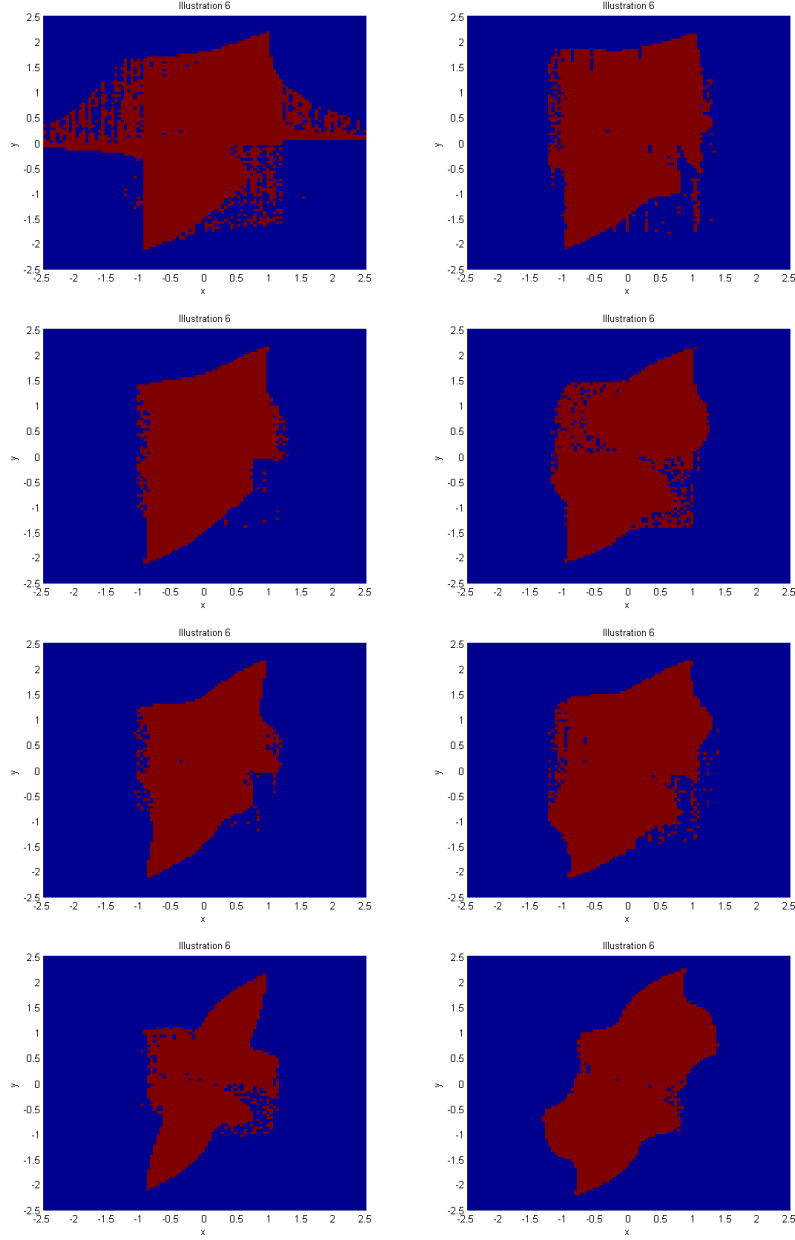


FIGURE 4.11. – Région où $\dot{V}(x) \leq 0$ pour des matrices tronquées ($d = 3, d = 4, d = 5$ et $d = 10$ en colonne à gauche) et projetées ($d = 3, d = 4, d = 5$ et $d = 10$ en colonne à droite)

Les différentes valeurs de la table 4.7 expliquent la difficulté à trouver une fonction de Lyapunov. Pour conclure sur la stabilité locale du système commuté 2.14 nous suggérons d'étudier le modèle linéarisé. En ce qui concerne ce dernier, le système commuté est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}_{A_1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

L'algèbre de Lie engendrée par les matrices A_1 et A_2 n'est pas résoluble. En effet, le test de résolubilité donne les résultats suivants

$$\mathcal{G}^{(1)} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \right\},$$

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

$$\mathcal{G}^{(2)} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$\mathcal{G}^{(3)} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -14 & -28 \\ 56 & 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -14 & 28 \\ -28 & 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 28 & 56 \\ 84 & -28 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nous cherchons alors la fonction candidate de Lyapunov sous la forme $V(x) = xQx^T$, avec $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ telle que

$$\begin{cases} Q > 0 \\ A_1 Q + Q A_1^T < 0 \\ A_2 Q + Q A_2^T < 0 \end{cases}.$$

La figure 4.12 représente la région où $\dot{V}(x)$.

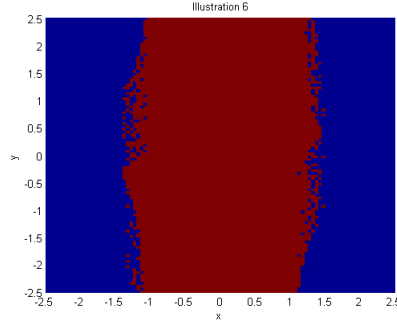


FIGURE 4.12. – Région où $\dot{V}(x) \leq 0$ pour le modèle linéarisé.

La norme de Q trouvée après la résolution des *LMI*s est $\|Q\| = 3.265 \times 10^{-12}$. Nous avons aussi du mal à trouver une bonne fonction de Lyapunov. Nous terminons ces constats par deux détails⁷ sur les sous-systèmes du système commuté 2.14. D'après [20] (page 9), « le premier sous-système admet un point localement stable à l'origine et deux points-selle instables en $(\pm\sqrt{6}, 0)$ et le second est l'oscillateur de Van der Pol qui admet un cycle limite instable correspondant à la frontière du bassin d'attraction de l'origine ». Enfin, la figure 4.13, illustre la trajectoire de ce système pour quelques conditions initiales.

La figure 4.13 montre que partant des points $(-0.5, 0.3)$, $(1, 1)$ et $(0.7, -0.3)$ le système est stable. Ce dernier ne l'est plus si les points $(1, -2)$ (pour lequel la stabilité dépend de la loi de commutation), $(-3, -5)$ et $(40, 15)$ sont pris comme conditions initiales.

D'après ces illustrations, nous constatons que le bassin d'attraction estimé, selon la méthode développée dans ce travail, est tel que certaines zones de stabilité ne sont pas atteintes. Cependant, le plus important est que les régions obtenues soient bien comprises à l'intérieur du bassin d'attraction (trajectoires stables), ce qui est le cas ici. Encore une fois, toutes les conditions initiales ne sauraient être testées quelle qu'en soit petite la région d'attraction trouvée. Notons aussi que plus la valeur de d augmente plus le niveau de la fonction de Lyapunov est grand. Nous observons également qu'en général la projection des matrices de Koopman permet de trouver un bassin d'attraction plus important que leur troncature. Pour ce dernier cas, augmenter le degré total d conduit généralement aux résultats moins bons tandis que pour le premier les observations sont variées et dépendent d'un système à un autre. Signalons enfin que même pour des systèmes commutés où l'algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman est non résoluble, une fonction de Lyapunov commune peut être trouvée.

7. Rien ne nous confirme l'influence des natures de ces sous-systèmes sur le système commuté.

4. Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires

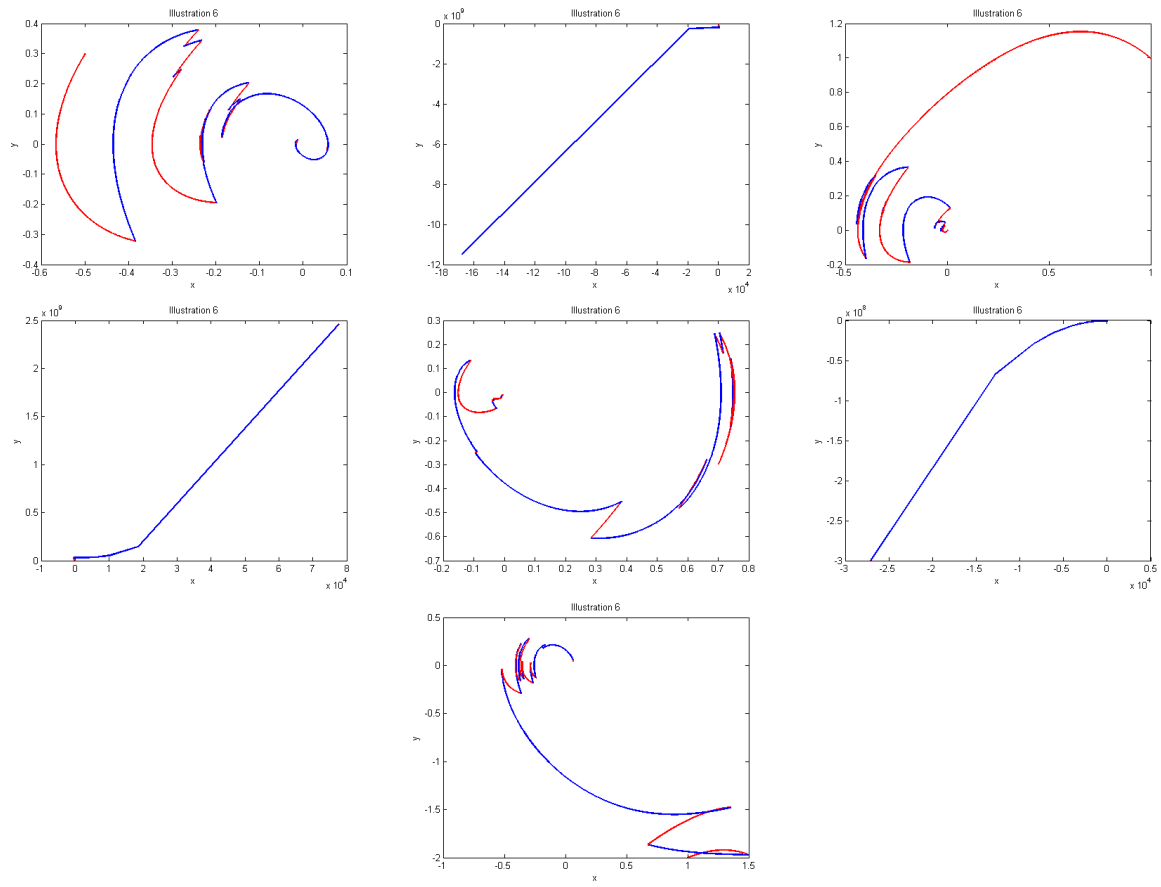


FIGURE 4.13. – Trajectoire du système commuté 2.14 pour $(x_0, y_0) = (-0.5, 0.3), (-3, -5), (1, 1), (40, 15), (0.7, -0.3), (1, -2)$ et $(1, -2)$.

Nous voici au terme de cet effort qui a porté sur l'étude de la stabilité uniforme des systèmes non linéaires commutés. Nous n'avons nullement la prétention d'avoir exploré la totalité de cette immense thématique. Toutefois, conformément à l'objectif et aux tâches assignés, nous avons pu investiguer quelques lignes de cette problématique.

Dans ce travail nous avons développé une méthode numérique systématique permettant d'appliquer l'opérateur de Koopman aux systèmes commutés non linéaires. Le lien entre les deux notions vient renforcer les méthodes, non exhaustives, d'étude de la stabilité pour les systèmes commutés non linéaires. Ce lien nous a permis de nous appuyer sur les résultats existants dans le cas linéaire.

Au cours de cette démarche, nous avons

- exprimé la réalisation de l'opérateur de Koopman L_U dans la base \mathcal{B} de monômes en le représentant par une matrice \mathbf{L} . Cette dernière, obtenue de deux manières : par troncature et par projection, nous a permis de transformer le système commuté non linéaire $\dot{x} = F_i(x)$, $i = 1, 2$ en un système commuté linéaire $\dot{\psi}(x) = \mathbf{L}_i^T \psi(x)$, $i = 1, 2$ dans l'espace \mathcal{F} des fonctions observables ;
- réalisé un algorithme de test de résolubilité de l'algèbre de Lie engendrée par des matrices ;
- montré l'isomorphisme entre les algèbres de Lie engendrées par les champs de vecteurs et par les opérateurs de Koopman correspondants, ce qui nous a permis d'ouvrir une autre voie de sortie possible pour résoudre le problème ouvert posé par D. Liberzon ;
- présenté quelques calculs montrant la différence entre les résultats de D. Liberzon et ceux qu'on pourrait obtenir en envisageant la voie proposée dans ce travail ;
- construit une fonction de Lyapunov commune, de la forme $V(x) = \psi^T(x)Q\psi(x)$, pour le système commuté non linéaire $\dot{x} = F_i(x)$, $i = 1, 2$. Celle-ci est plus générale que les fonctions quadratiques utilisées habituellement. Elle est obtenue de manière systématique via la résolution de LMIs définies au moyen des matrices de Koopman ;
- estimé, à partir de la fonction $V(x)$, le bassin d'attraction d'un système commuté non linéaire ;
- illustré la méthode développée au moyen de quelques exemples. Nous avons ainsi remarquer des nuances entre les résultats obtenus d'une part avec les matrices de Koopman tronquées et projetées et d'autre part avec les différentes valeurs du degré total d des monômes de la base \mathcal{B} .

Nous pensons que ce travail constitue une première phase d'un programme beaucoup plus ambitieux car les perspectives sont légion. Dans ce cadre, il est envisageable

5. Conclusion

1. d'étendre la méthode à des systèmes commutés en dimension supérieure, à ceux ayant un nombre quelconque de sous-systèmes,... bref, dépasser les restrictions faites dans ce travail. Une telle extension serait triviale;
2. de considérer une base de l'espace \mathcal{F} de fonctions observables autre que la base de monômes \mathcal{B} . Cela permettrait de considérer le cas de champs de vitesse non polynomiaux ;
3. de considérer des lois de commutation différentes, dépendant de l'état ou autonomes ou contrôlées,... ;
4. de résoudre le problème ouvert de D. Liberzon en établissant, si possible,
 - le transfert des propriétés de stabilité de l'algèbre de champs de vecteurs à l'algèbre des opérateurs de Koopman ;
 - un test de résolubilité basé sur les champs de vecteurs.

Toutes ces perspectives ont vu le jour suite au travail présenté ici mais n'auraient pas pu y être investiguées. Au delà de toutes ces perspectives, nous pourrions également confronter les méthodes numériques développées à une application bien concrète. Cela permettrait d'améliorer ces différentes méthodes, et donc ce travail. Enfin dans notre démarche, nous n'avons étendu, au cas non linéaire, que la propriété de résolubilité. Il serait aussi intéressant de considérer de la même façon d'autres résultats existant pour le cas linéaire.

Appliqué à un système commuté non linéaire, l'opérateur de Koopman permet d'en étudier la stabilité grâce au transfert des méthodes existant dans le cas linéaire. Ce travail est une ébauche pour ce mode de transfert. Il procède par la réalisation de l'opérateur de Koopman dans la base de monômes. Ainsi, deux méthodes numériques principales sont utilisées. La première permet de tester la résolubilité de l'algèbre de Lie engendrée par les matrices de Koopman et la deuxième permet de construire une fonction de Lyapunov commune afin d'estimer le bassin d'attraction d'un système commuté. Malgré les limites de notre démarche, nous sommes convaincu que la problématique développée dans ce travail reste intéressante. Nous avons eu ici l'occasion de proposer un nouvel angle d'attaque sur le problème ouvert de D. Liberzon, voie qui pourrait être poursuivie dans le futur.



A.1. Code principal

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Programme principal                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ce programme permet de calculer les matrices de Koopman,
% de faire appel aux sous-programmes constituant les differentes methodes
% et de représenter le bassin d'attraction estime

clear all
clc

% Les deux premieres (resp. dernieres) lignes de F representent le champs de vitesse
% du premier (resp. second) sous-systeme
% Seuls les coefficients, complets et en ordre, sont concernes
F=[0 -2 -5 0 0 0 -1 0 0 -1;0 6 -3 0 0 0 1 0 0 -1;0 0 -1 1 0 0 -1 0 0 0;0 4 -2 0 0 0 0 0 0 0];

%d est le degre total des monomes de la base
d=3;
%Les matrices de Koopman sont stockees dans la variable koopman_matrices
koopman_matrices=[];

%L'une ou l'autre facon de calculer les matrices de Koopman est commente
%selon qu'il s'agisse du cas de la projection ou pas
'Les matrices de Koopman sans projection'
for i=1:2
    koopman_matrices{i}=koopmanmatrix(F(2*i-1,:),F(2*i,:),d);
    % Suppression de la premiere ligne et colonne
    koopman_matrices{i}(:,1)=[];koopman_matrices{i}(1,:)=[];
    % Affichage de la matrice de Koopman
    disp(koopman_matrices{i})
end

% 'Les matrices de Koopman avec projection'
% for i=1:2
```

A. Codes Matlab

```
%      koopman_matrices{i}=koopmanmatrixp(F(2*i-1,:),F(2*i,:),d);
%      % Suppression de la premiere ligne et colonne
%      koopman_matrices{i}(:,1)=[];koopman_matrices{i}(1,:)=[];
%      % Affichage de la matrice de Koopman
%      disp(koopman_matrices{i});
%
% end

%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      Test de resolubilite      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Ce sous-programme effectue le test de resolubilite avec comme entrees les
%matrices de Koopman et comme sortie le resultat du test
'Test de resolubilite'
result_test=resolubility(koopman_matrices)

%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      Fonction de Lyapunov commune      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Ce sous-programme permet de calculer la fonction de Lyapunov commune
%Il recoit en entree les matrices de Koopman, le degre total fixe et les
%coefficients des champs de vitesse
%Il donne en sortie la fonction de Lyapunov commune et sa derivee le long
%des champs de vitesse
'Fonction de Liapunov commune'
[V_xy Vderiv_xy]=liapunovfonction(koopman_matrices,d,F(1:2,:),F(3:4,:))

%%
%Cette section permet d'evaluer la derivee de la fonction de Lyapunov trouvee
x=sym('x','real');
y=sym('y','real');
[p q]=meshgrid(-2:0.05:2,-2:0.05:2);
region1=double(subs(Vderiv_xy(1),{x,y},{p,q}));
region2=double(subs(Vderiv_xy(2),{x,y},{p,q}));
z=subs(V_xy,{x,y},{p,q});

%%
%Cette section permet de représenter sur un graphe la zone où la dérivée de la fonction
%de Lyapunov est négative ou nulle et celle où elle est positive, et
%de tracer la courbe de niveau de la fonction de Lyapunov
hold all
h= pcolor(p,q,(region1<=0).*(region2<=0));
xlabel('x')
ylabel('y')
set(h,'linestyle','none')
```

```

title('Illustration 1')
[val_fig,propr_fig]= contour(p, q, z,[55 55],'w');
set(propr_fig,'LineWidth',2.0);
caxis([0 1])

```

A.1.1. Calcul de la matrice de Koopman tronquée

```

function [L]=koopmanmatrix(F1,F2,d)
%Cette fonction calcule la matrice de Koopman L
%Elle prend en entree F1 et F2 qui representent respectivement la derivee
%temporelle de x et de y
%d est le degre total de monomes choisi pour la base
%Elle fait appel a une autre fonction: indice

%table_index est une matrice 2x2 contenant en ordre le degre des monomes,
table_index=indice(d);
%N represente le nombre de monomes dans la base donc la dimension de
%l'espace des fonctions observables
N=(d+1)*(d+2)/2;
%Initialisation de la matrice de Koopman
L=zeros(N);
%La boucle construit une après une autre les N colonnes de L
for i=1:N
    %p correspond a l'exposant de x et
    %t contient celui de x et de y
    p=table_index(i,1);
    t=table_index(i,:);
    %Si l'exposant de x est nul il n'y a pas moyen de trouver deriv
    if(t(1)>0)
        %deriv correspond a la derivee par rapport a x
        deriv=t-[1 0];
        %Cette boucle permet de constituer les lignes de L
        for k=1:size(F1,2)
            index=table_index(k,:)+deriv;
            j= find(ismember(table_index,index,'rows'));
            L(j,i)=L(j,i)+p*F1(k);
        end
    end
    %pp correspond a l'exposant de y
    pp=table_index(i,2);
    %Si l'exposant de y est nul il n'y a pas moyen de trouver deriv
    if(t(2)>0)
        %deriv correspond a la derivee par rapport a y
        deriv=t-[0 1];
        for k=1:size(F2,2)
            index=table_index(k,:)+deriv;
            j= find(ismember(table_index,index,'rows'));
            L(j,i)=L(j,i)+pp*F2(k);
        end
    end
end
end

```

```
end
```

Table d'indices

```
function [table]=indice(d)
%Cette fonction construit la table des exposants de monomes de degre total
%inferieur ou egal a d
table=[];
for degre_tot=0:d
    for x=degre_tot:-1:0
        y=degre_tot-x;
        table=[table; [x y]];
    end
end
end
```

A.1.2. Calcul de la matrice de Koopman projetée

```
function [L]=koopmanmatrixp(F1,F2,d)
%Cette fonction calcule la matrice de Koopman L en utilisant la projection
%de chaque colonne de la matrice rectangulaire LL sur la base choisie
%Elle fait appel a deux autres fonctions: indice et projectionkoopman

%Ici dd est degre total du champs de vitesse
dd=size(F1,2);
%Ce calcul de dd est bon a condition que les coefficients de F1 soient en ordre et au complet
%il permet de retrouver la dimension etant donne le degre total
dd=(sqrt(8*dd+1)-3)/2;
table_index=indice(d+dd-1);
param.table_index = table_index;
%NN represente le plus grand nombre de monome qu'on peut atteindre si les
%matrices de Koopman ne sont pas tronquees
NN=(d+dd)*(d+dd+1)/2;
%N represente le nombre de monomes dans la base donc la dimension de
%l'espace des fonctions observables
N=(d+1)*(d+2)/2;
%LL est la matrice de Koopman rectangulaire dont chaque colone sera
%projete pour avoir la matrice carree de Koopman L
%Initialisation de LL et L
LL=zeros(NN,N);
L=zeros(N);
for i=1:N
    p=table_index(i,1);
    t=table_index(i,:);
    if(t(1)>0)
        deriv=t-[1 0];
        for k=1:size(F1,2)
            index=table_index(k,:)+deriv;
            j= find(ismember(table_index,index,'rows'));
            LL(j,i)=LL(j,i)+p*F1(k);
        end
    end
end
```

```

pp=table_index(i,2);
if(t(2)>0)
    deriv=t-[0 1];
    for k=1:size(F2,2)
        index=table_index(k,:)+deriv;
        j= find(ismember(table_index,index,'rows'));
        LL(j,i)=LL(j,i)+pp*F2(k);
    end
end
end
%Projection de la colonne u de LL sur la base fixe pour avoir une
%colonne de L
u=LL(:,i);
L(:,i)=projectionkoopman(u,N,NN,param);
end
end

```

Projection d'un vecteur-colonne

```

function [up]=projectionkoopman(u,m,n,param)
%Cette fonction calcule la projection du vecteur u appartenant a un
%sous-espace dont la base est constituee de monomes de degre total n sur un
%sous-espace dont la base est constituee de monomes de degre total m plus
%petit que n
%Elle prend en entree le vecteur u de longueur n, les dimensions n et m et
%la table des exposants de x et y comme parametre
table_index = param.table_index;
%%M est le meme chaque fois donc inutile de la calculer plusieurs fois
%Initialisation des matrices M et P
%M=zeros(m);
P=zeros(m,n);
%Cette boucle calcule le produit scalaire entre les elements de la base de
%taille m et celle de taille n en utilisant les exposants
for i=1:m
    a=table_index(i,:);
    for j=1:n
        b=table_index(j,:);
        if(mod(a(1)+b(1)+1,2)==1)
            if(mod(a(2)+b(2)+1,2)==1)
                val=(a(1)+b(1)+1)*(a(2)+b(2)+1);
                P(i,j)=4/val;
            end
        end
    end
end
end
end
%La matrice M n'est qu'une sous-matrice de P
% M=P(:,1:m);
%On resout cette equation pour avoir le vecteur projection up
up=P(:,1:m)\(P*u);
end

```

A.1.3. Test de résolubilité

```

function [result_test]=resolubility(Lie)
%Cette fonction correspond au test de resolubilite de l'algebre de Lie
%engendree par des matrices
%Elle permet de calculer la base de Philipp-Hall et les bases des ideaux
%iteres de l'algebre de Lie des matrices
%Elle fait appel aux fonctions crochettlie, basehall et iteralgebre

%%%%%%%%%%%% Premiere etape: base de Philipp-Hall%%%%%%%%%%%%

%t correspond a la taille des matrices de depart
t=size(Lie{1},1);
tt=t*t;
%On effectue les premiers crochets de Lie entre les matrices de depart
%et on trouve un nouveau paquet de matrices independantes Croclie
Croclie=crochettlie(Lie);
%Cette boucle permet de trouver la base de Hall
for i=1:tt
    m=size(Croclie,2);
    n=size(Lie,2);
    %Si le nombre de matrices ne change plus c'est qu'on en ajoute plus
    %car les autres sont dependantes de premieres et donc qu'on a deja
    %la base recherchee
    if(m==n)
        break
    else
        Lie=Croclie;
        Croclie=basehall(m,n,Lie);
    end
end

end

%Affichage des matrices de base: a decommenter si necessaire
% 'Base de Phillip Hall'
% for i=1:size(Croclie,2)
%     disp(Croclie{i});
% end

%%%%%%%%%%%% Deuxieme etape: les ideaux iteres %%%%%%%%%%%%%%

%cette boucle calcule les sous-algebres de Lie iterees
for i=1:t
    Lie=iteralgebre(Croclie);
    Croclie=Lie;
    %Affichage de la base d'une sous-algebre: a decommenter si necessaire
    %'Base de la sous-algebre L(n) pour n='
    %n=i+1
    %for j=1:size(IL,2)
    %disp(IL{j})
    %end
    if(size(Lie,2)==1)

```

```

        break
    end
end
if(size(Lie,2)==1)
    result_test='Algebre de Lie resoluble';
else
    result_test='Algebre de Lie non resoluble';
end
end
end

```

Crochet de Lie entre matrices engendrant \mathcal{G}

```

function [Lie]=crochetlie(Lie)
%cette fonction calcule les crochets de Lie entre n matrices
%Elle prend en entree les n matrices stockees dans Lie
%et donne a la sortie les n matrices avec les crochets independants

%n est nombre de matrices de depart
n=size(Lie,2);
%Ici toutes les n matrices sont mises en colonnes pour constituer une
%grande matrice L facilitant le test d'independance des matrices
L=Lie{1}(:);
for i=2:n
    L=[L Lie{i}(:)];
end
%Cette boucle calcule les crochets de Lie entre les n matrices
for i=1:n-1
    for j=i+1:n
        r=rank(L);
        P=Lie{i}*Lie{j}-Lie{j}*Lie{i};
        %Normalisation des matrices produits
        if norm(P) ~= 0
            P=P/norm(P);
        end
        %Test de rang pour ajouter ou non une matrice aux n de depart
        if(rank([L P(:)])>r)
            L=[L P(:)];
            Lie=[Lie P];
        end
    end
end
end
end

```

Base de \mathcal{G}

```

function [Lie]=basehall(m,n,Lie)
%cette fonction permet de calculer la base de Philipp-Hall
L=Lie{1}(:);
for i=2:m
    L=[L Lie{i}(:)];
end
%Cette boucle calcule les crochets de Lie entre anciennes et nouvelles

```

```

%matrices
for i=1:m-1
    for j=n+1:m
        if(i<j)
            r=rank(L);
            P=Lie{i}*Lie{j}-Lie{j}*Lie{i};
            if norm(P) ~= 0
                P=P/norm(P);
            end
            if(rank([L P(:)])>r)
                L=[L P(:)];
                Lie=[Lie P];
            end
        end
    end
end
end
end

```

Les sous-algèbres \mathcal{G}

```

function [Lie]=iteralgebre(Croclie)
%Cette fonction permet de calculer base de la sous-algebre de l'algebre des
%matrices dans Croclie

n=size(Croclie,2);
d=size(Croclie{1},1);
L=[];
Lie=[];
%cette boucle calcule les crochets entre les matrices de base
%de la sous-algebre precedente Croclie
for i=1:n-1
    for j=i+1:n
        r=rank(L);
        P=Croclie{i}*Croclie{j}-Croclie{j}*Croclie{i};
        if norm(P) ~= 0
            P=P/norm(P);
        end
        if(rank([L P(:)])>r)
            L=[L P(:)];
        end
    end
end
end
% Cette condition tient compte du fait que si dans la base on a des matrices qui
% commutent,L ne sera pas calculee
if(rank([L P(:)])==0)
    Lie{1}=P
else
    for i=1:size(L,2)
        Lie{i}=reshape(L(:,i),d,d);
    end
end
end

```


end

A.1.4. Calcul de la fonction de Lyapunov commune

L'utilisation de ce code nécessite l'installation d'un package supplémentaire (voir [9]) pour résoudre les *LMIs*.

```
function [V_xy, Vderiv_xy]=liapunovfonction(koopman_matrices,d,F1,F2)
%cette fonction calcule la fonction de Lyapunov commune en resolvant les
%LMIs puis sa derivee le long des champs de vitesse
%Elle prend en entree les matrices de Koopman, le degre total d et les
%coefficients de deux champs de vitesse F1 et F2
%Elle fait appel a la fonction indice

%Ces variables symboliques permettent d'exprimer l'etat augmente Psi_xy,
%la fonction de Lyapunov V_xy,sa derivee Vderiv_xy et
%les champs de vitesse F1_xy et F2_xy en symbolique
x=sym('x','real');
y=sym('y','real');
Psi_xy=sym('Psi_xy','real');
V_xy=sym('V_xy','real');
Vderiv_xy=sym('Vderiv_xy','real');
F1_xy=sym('F1_xy','real');
F2_xy=sym('F2_xy','real');

table_index=indice(d);
%Suppression de la premiere ligne de la table
table_index(1,:)=[];
N=(d+1)*(d+2)/2;
% Resolution de LMIs pour trouver la matrice definie positive Q
L1=koopman_matrices{1};
L2=koopman_matrices{2};
Q=sdpvar(N-1,N-1);
P = 1/100 * eye(N-1,N-1);
%Definition des contraintes
C1 = [L1*Q + Q*L1' + P <= 0];
C2 = [L2*Q + Q*L2' + P <= 0];
C3 = [Q >= 0];
C = C1 + C2+ C3;
solvesdp(C);
Q = double(Q);
%Expression de l'etat augmente
for i=1:N-1
    Psi_xy(i)=x^table_index(i,1)*y^table_index(i,2);
end
%Calcul de la fonction de Liapunov
V_xy=expand(Psi_xy*Q*Psi_xy');
%Suppression des premieres lignes de F1 et F2
F1(:,1)=[];
F2(:,1)=[];
%Expression des champs de vitesse en symbolique
```

A. Codes Matlab

```
Psi_xy=Psi_xy';  
F1_xy=F1*Psi_xy(1:size(F1,2),1);  
F2_xy=F2*Psi_xy(1:size(F1,2),1);  
%Calcul de la derivee le long des champs de vitesse  
grad_V=gradient(V_xy);  
Vderiv_xy=[expand(F1_xy'*grad_V);expand(F2_xy'*grad_V)];  
end
```

Bibliographie

- [1] A. Agrachev et D. Liberzon, *Lie-algebraic stability criteria for switched systems*. SIAM J Control Optimisation, vol. 40, pages 253-269, 2001.
- [2] D. Angeli and D. Liberzon, *A note on uniform global asymptotic stability of nonlinear switched systems in triangular form*, In : Proc. 14th Int. Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), 2000.
- [3] R. Bourdais, *Une contribution à la modélisation et à la commande des systèmes non linéaires à commutation*. Automatique/Robotique. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lille, 2007.
- [4] M. Budisic, R. Mohr and I. Mezic, *Applied Koopmanish*, Chaos : An interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2012.
- [5] T. Chu, C. Zhang and L. Wang *A Solvable Lie Algebra Condition of Stability of Linear Multidimensional Systems*, IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. 51, NO.2, February 2006.
- [6] W. P. Dayawansa and C. F. Martin, *A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching*, IEEE Trans. Automat. Control, vol 44, pages 751-760, 1999.
- [7] C. Dubi, *An algorithmic approach to simultaneous triangularization*, Linear Algebra and its Applications, vol 430, pages 2975-2981, 2009.
- [8] L. Gurvits, *Stability of discrete linear inclusion*, Linear Algebra Appl, vol 231, pages 47-85, 1995.
- [9] M. Heemels, B. van Lon and N. Borghers *Solving Linear Matrix Inequalities using the Multi Parametric Toolbox*. Novembre 30, 2014.
- [10] T. J. Laffey, *Simultaneous Triangularization of a Pair of Matrices*, Journal of Algebra, vol 44, pages 550-557, 1977.

- [11] A. Lasota, and M. C. Mackey, *Probabilistic properties of deterministic systems*, Cambridge University Press, 1985.
- [12] D. Liberzon, J. Hespanha et A. Morse, *Stability of switched linear systems : a Lie-algebraic conditions*. Systems and Control Letters, vol. 37, pages 117-122, 1999.
- [13] D. Liberzon, *Switched Systems : Stability Analysis and Control Synthesis*, Lectures Notes for HYCON-EECI Graduate School on Control, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2003.
- [14] D. Liberzon et A. Morse, *Basic Problems in Stability and Design of switched Systems*. IEEE Control Systems Magazine, pages 59-70, 1999.
- [15] D. Liberzon, *Lie algebras and stability of switched nonlinear systems* In V. Blondel and A. Megretski, editors, *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory*, pages 203-207. Princeton University Press, 2004
- [16] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*. Birkhauser, Boston, 2003.
- [17] J. Mancilla-Aguilar, *A condition for the stability of switched nonlinear systems*. IEEE Trans. Automat. Control, vol 47, pages 2077-2079, 2000.
- [18] J. Mancilla-Aguilar and R. Garcia, *A converse Lyapunov theorem for nonlinaer switched systems*. Systems and Control Letters, vol 41, pages 67-71, 2000.
- [19] M. Margaliot et D. Liberzon, *Lie-algebraic stability conditions for nonlinear switched systems and differential inclusions*. Systems and Control Letters, vol 55, pages 8-16, 2006.
- [20] A. Mauroy and I. Mezic', *Global stability analysis using the eigenfunctions of the Koopman operator*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 61, pages 3356-3369, 2016
- [21] A. Mauroy and I. Mezic', *A spectral operator-theoretic framework for global stability*. In Proceedings of the 52th IEEE Conference on Decision and Control, pages 5234-5239, December 2013.
- [22] J. Melin, *Synthèse de lois de commande pour les systèmes à commutations avec contraintes de performances*. Automatique/Robotique. Thèse de doctorat. Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL, 2011.
- [23] I. Mezic', *Analysis of Fluid Flows via Spectral Properties of the Koopman Operator*. Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 45, January 2013
- [24] T. Y. Mori et Y. Kuroe, *A solution to the common Lyapunov function problem for continuous-time systems*. Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control, vol 3, pages 3530-3531, 1997.

Bibliographie

- [25] P. Mullhaupt, *Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2009.
- [26] K. S. Narendra and J. Balakrishnan, *A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices*, IEE Trans. Automat. Control, vol 39, pp 2469-2471, 1994.
- [27] Y. Sharon and M. Margaliot, *Third-order Nilpotency, Finite Switchings and Asymptotic Stability*, Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and The European Control Conference 2005
- [28] H. Shim, D. J. Noh and J. H. Seo, *Common Lyapunov function for exponentially stable nonlinear systems*. J. Korean Institute of Electrical Engineers, vol 11, pages 108-111, 2001.
- [29] R. A. Thompson, *Galerkin Projections Between Finite Element Spaces*, Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Mathematics, 2015.